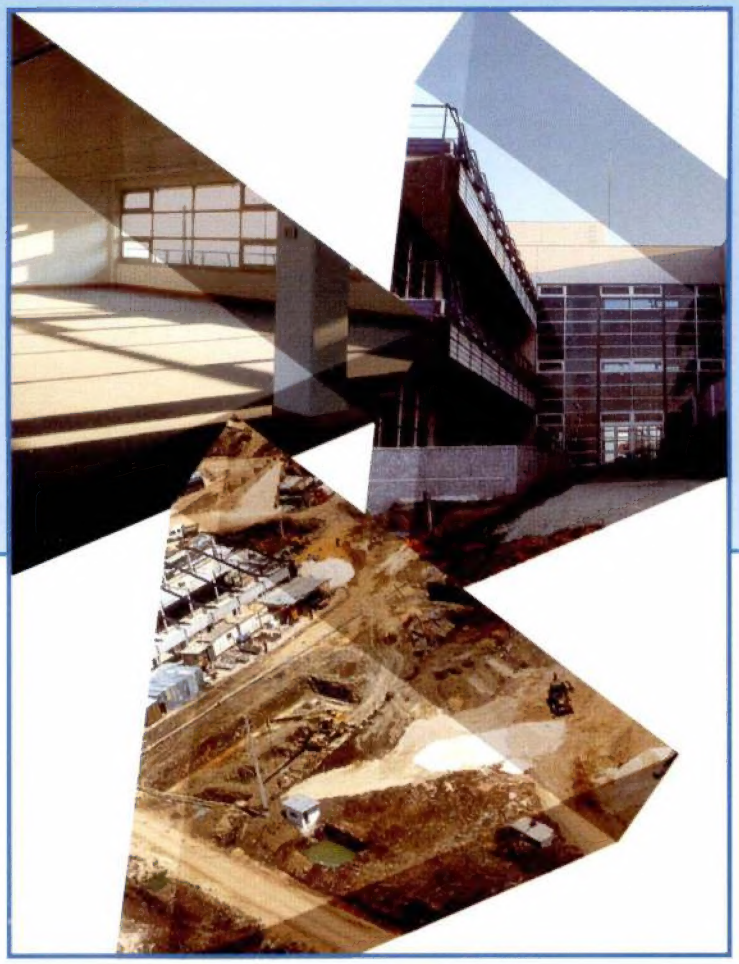
TÉCNICA

Revista de Engenharia

Publicação trimestral
de investigação científica e desenvolvimento
nº4/95 Dezembro 95
ISSN 0040-1714 pvp 500.00

70 ANOS A COMUNICAR O FUTURO



Utentes em lote próprio:

ALA Associação de Laboratórios Aeroespaciais (em projecto)
BCP Banco Comercial Português (já parcialmente instalado)
CGD Caixa Geral de Depósitos (em concurso)
CNIG Centro Nacional de Informação Geográfica (em projecto)
EDP Electricidade de Portugal, S.A. (em projecto)
ICTPOL Instituto de Ciência e Tecnologia de Polímeros (em projecto)
INESC Instituto de Engenharia de Sistemas e Computadores (em obra)
INTERG Instituto da Energia (em projecto)
ISQ Instituto de Soldadura e Qualidade (já instalado)
IST Instituto Superior Técnico (em projecto)
PT Portugal Telecom, S.A. (em projecto)
SIBS Sociedade Interbancária de Serviços, S.A. (em concurso)
UTL Universidade Técnica de Lisboa (em projecto)

Utentes em regime de arrendamento:

ABSORSOR Engenharia Acústica, Vibração e Ambiente, Lda.
AMBISEGUR Projectos, Consultoria e Auditoria em Segurança e Ambiente S.A.
BEREMIZ Microcomputadores e Serviços, Lda.
CONSULPAV Consultores e Projectistas de Pavimentos, Lda.
CONVEX Informática e Sistemas de Comunicações Portugal, Lda.
CPEC Companhia Portuguesa de Electricidade e Calor, Lda.
ELECTROCLORO Soc. de Estudos, Equipamentos e Instalações, S.A.
ENERSIS Energia e Sistemas, S.A.
ESTEC Estudos e Tecnologias da Informação, S.A.
EUROCONTROL Engenharia de Sistemas, Controlo e Equipamentos, Lda.
EUROLAN Soluções Informáticas, Lda.
EUROTELECOM Sistemas de Telecomunicações, Lda.
FADO Informática e Sistemas, Lda.
FATRÓNICA Fabrico de Artigos Electrónicos, S.A.
GEOMETRAL Técnicas de Medição e Informática, S.A.
HAWA EUROPE Válvulas e Acessórios, Lda.
IGRED Internacional, Gestão, Recuperação, Estratégia e Desenvolvimento da Empresa, S.A.
INTERGRAPH (PORTUGAL) Sistemas de Computação Gráfica, S.A.
IRRADIARE Investigação e Desenvolvimento em Engenharia e Ambiente, Lda.
LABORTERAPIA Produtos Farmacêuticos, Lda.
LASERDATA Importação e Exportação de Produtos Informáticos e Consultadoria, Lda.
MARCONI Laboratório de Calibração e Manutenção, S.A.
MINISOFT Sistemas de Informação, Lda.
MULTINOVE Aparelhagem Eléctrica, S.A.
NORELCO Equipamentos Eléctricos, Lda.
NOVAGEO Análise e Desenvolvimento de Sistemas, Lda.
PAULO M. S. D. PEDRO Automação Doméstica e Industrial
PRISTAL Sociedade Gestora Participações Sociais, S.A.
SILICON GRAPHICS
SQÉDIO Design Industrial, Lda.
TECMIC Tecnologias de Microelectrónica, S.A.
TECNET Consultores em Tecnologias da Informação, Lda.
TECNOPROJECTO Consultoria, Projectos e Realizações Industriais, Lda.
TERRACARTA Consultoria Geomática, Lda.
TRANSFOPOR Transformadores, Lda.
UNIFINA Sociedade Financeira de Aquisições a Crédito, S.A.

(Outubro de 1995)

... e há um tempo de concretização.

TAGUSPARQUE, S.A.
Taguspark - Parque de Ciência e Tecnologia
Núcleo Central, 100
2780 OEIRAS

Tel.: 422 69 31 • Fax: 422 69 36

TAGUSPARK
PARQUE DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
O Espaço das Sinergias

índice

Editorial 2
ARTIGO CONVIDADO
Ad Multos Annos: J. Fernando de Souza 5
COMUNICAÇÕES CIÊNTIFICAS:
Modernas Concepções da Mecânica: A. Mira Fernandes 9
Estructura da Luz - Hipótese dos Quanta métodos de Estatística: António da Silveira 21
Um Vulcão perto de Lisboa entre Morganhal e Laveiras: Prof. Ernest Fleury 51
Investigação Científica e Indústria: A. Herculano de Carvalho 59
Notas sobre a determinação do Maganês nos seus minérios: A. Herculano de Carvalho 63
Novo método de cálculo e acerto dos diagramas no projecto das turbinas mixtas (Francis): Manuel P.R. da Costa de Barros 69
Estudo sobre o electrodinamómetro de indução: C. Ferrer Moncada 85
Movimento permanente gradualmente variado, estudo geral do Regolfo: Alberto Abecasis Manzanares 95
A Fotoelasticidade no ensino e na técnica: Manuel Mendes da Rocha 109

FICHA TÉCNICA:

TÉCNICA, Revista de Engenharia
Publicação trimestral - p.v.p. 500$00
distribuição gratuita aos sócios da AEIST e aos docentes do IST
ISSN 0040-1714
Depósito legal 85 962/95
Registo de Imprensa 101407

Propriedade
Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico
Av. Rovisco Pais, P – 1000 Lisboa, Portugal
Contrib. N.º 501 055 606

Administração, Serviços Comerciais e Assinaturas
Av. Rovisco Pais, P - 1000 Lisboa, Portugal
Telef: 351 -1- 848 10 18/841 74 10
Fax: 351 -1- 847 40 14/849 92 47
Correio Electrónico – aeistdoc © eta.ist.utl.pl

Direcção
Director Científico: Manuel Abreu Faro
Director Executivo: Luís Lopes
Vogais: Diogo Gomes e João Paulo Santos
Secretariado: Paula Carvalho

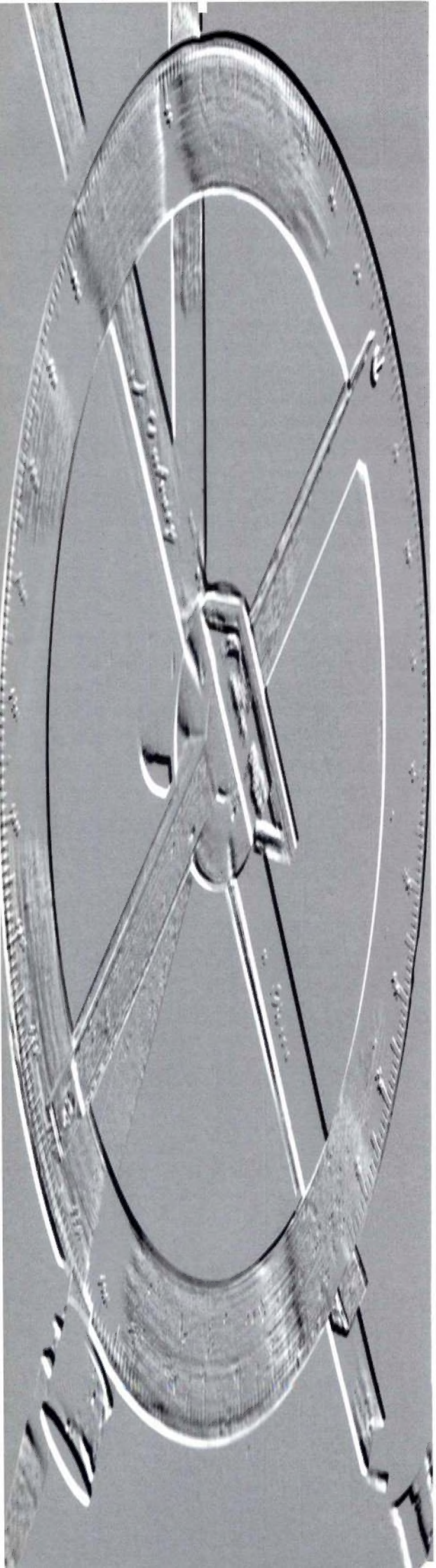
Concepção Gráfica
Traça Design
Praça da Alegria, 6 - 2.º Esq. – 1200 Lisboa
Telef: (01) 343 13 21
Fax: (01) 343 13 24

Publicidade
Dossier Comunicação e Imagens, Lda.
R. Eça de Queirós, 18 – 2.º Lisboa
Telef: (01) 355 92 94/5 – 353 73 21
Fax / Telef: (01) 353 73 16

Execução Gráfica
Gráfica Maiadouro, S.A.
VERMOIM – 4470 Maia
Telef. (02) 948 02 45/948 88 05
Fax: (02) 948 77 07
Delegação em Lisboa
Telef. (01) 796 92 10/795 53 00
Fax: (01) 796 92 79
Tiragem: 5000 ex.

TIB / Dominique Sarraute

Apoio
Conselho Directivo do Instituto Superior Técnico



EDITORIAL

"O Instituto Superior Técnico foi criado em 23 de Maio de 1911.

A Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico, a AEIST, foi fundada em 11 de Dezembro de 1911.

No tempo, a esta distância dos dias de hoje, a fundação do Instituto e a fundação da Associação coincidem.

Praticamente são factos que emergem na mesma data e na mesma atitude.

Prenúncio de que o Instituto e a sua Associação de Estudantes ficariam ligados.

De facto assim tem sido.

A Associação nasceu do Técnico, mas o Técnico, o Instituto, deve parte importante da sua configuração e prestígio ao que a sua Associação de Estudantes tem sabido e desejado ser.

O essencial rege-se por regras simples de evidência e decorrente dever:

É estudante quem estudar.
É professor quem ensinar.
Que possa estudar quem estuda e que possa ensinar quem saiba e se ofereça".

Assim, quase assim, dissémos por ocasião dos 75 anos da Associação.

Nos 25 anos do I.S.T., Mira Fernandes, meditando sobre o êxito flagrante e inequívoco do Instituto dizia:

"Quanto deve o conseguimento dessa comunhão de ideais a que atrás aludo, ao espírito de colaboração entre professores e alunos, por todos manifestado e cultivado, desde a primeira hora, promovendo iniciativas, suscitando curiosidades estimulando vocações; e creando, sobretudo, hábitos de trabalho e a confiança no próprio esforço?"

Dessas iniciativas, grande, maior, foi a da fundação da Técnica em Dezembro de 1925, obra de alguns rapazes sábios e generosos, 14 anos depois do nascimento da Associação de Estudantes do I.S.T., numa adolescência que já revelava a maturidade tão característica da AEIST.

"Quiz a gentileza de um grupo de rapazes estudiosos e de boa vontade, empenhandos em crear na imprensa técnica um orgão

das especialidades que cultivam, a confiar-me a honrosa missão de o apresentar ao público num antelóquio".
São palavras do Engenheiro J. Fernando de Sousa, Presidente da Associação dos Engenheiros Civis Portugueses a que outras se seguem e culminam com uma alocução votiva e prenunciadora de vida e perenidade:

"Ad multos annos"

Com essa apresentação, que hoje se reproduz, se iniciou o n.º 1 da Técnica, em Dezembro de 1925.
Vinte cinco anos mais tarde Mira Fernandes é chamado e acorre à comemoração das Bodas de Prata da "Técnica":
"Comemora esta Revista os seus vinte e cinco anos de existência. Seu colaborador desde os primeiros números, com relativa assiduidade, sempre com devoção e agradecimento pelo agasalho recebido, interessado nos seus progressos e satisfeito com os seus triunfos, é-me grata a incubência de me associar a esta celebração, como testemunha do seu labor e confidente do seu viver.
Se essa intimidade me desvanece, o relembrá-la não é, porém, mera exibição dum título de que muito me orgulho. O meu intento é recordar que, sendo a Técnica, pelo nome e pelos apelidos, uma revista de engenharia, nunca os seus dirigentes se esqueceram de que ela é, também, uma revista escolar; e, como tal, devendo dar albergue e guarida, quando mereçam, a todos os temas relacionados com os domínios científicos que na escola se professam. E a essa atitude se deve a minha colaboração na Revista".
Antes, numa palestra feita no Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, em 29 de Maio de 1936, a convite da Associação Académica, Mira Fernandes não se auto-elogia mas envolve-se na deontologia que preside ao professor do ensino universitário:

"Pretendo, sim, lembrar e enaltecer o esforço ingente, a luta tenaz e ininterrupta, pela conquista do saber, em que se têm visto empenhados todos aqueles que, tendo terminado, nos princípios deste século, a frequência da escola, se encontravam investidos na profissão de ensinar quando, principalmente, lhes importava aprender".

Fascinado pelas Modernas Concepções de Mecânica, pela Ciência Nova em que se encontrou, Mira Fernandes, particularizou, mas enunciou, talvez, o dever maior do professor, convívio misterioso de vocação, alegria, sacrifício, para que se cumpra o preceito simples:

"que possa ensinar quem saiba e se ofereça"

o que exige, tantas vezes, uma tão estranha e absurda luta para se conseguir.
Da assunção deste dever, do espírito de missão, entusiasmo, cuidado e rigor científico, que punham no seu cumprimento, são exemplos admiráveis os excertos que se publicam de cursos do Professor Aureliano Mira Fernandes e do Professor António da Silveira, indiciadores, ainda, do nível científico do, então, jovem Instituto Superior Técnico.
Do interesse em colaborar na Revista e ainda da originalidade, profundidade e actualidade das matérias investigadas e abordadas são também exemplo forte os artigos dos:

Prof. Ernest Fleury
Prof. António Herculano de Carvalho
Prof. Manuel de Barros
Prof. Carlos Ferrer Moncada
Prof. Alberto Abecasis Manzanares
Prof. Manuel Rocha

Nesses tempos estudava-se e investigava-se fundamentalmente para manter um pensamento actualizado, um ensino conforme com a modernidade, embora, e como aflora dos artigos, se aplique e com rigor o saber adquirido.
Não se investigava, sistematicamente, e noutros contextos, como hoje acontece.

Nos 75 anos da AEIST, como se disse, tive a grata oportunidade de me pronunciar sobre essas efemérides.

Não podia deixar de referir a Técnica:

"Além de tudo quanto realizou no campo pedagógico, cultural e desportivo. Além da realidade forte que é a Técnica, além de tudo isso, a Associação foi e será sempre uma escola de dirigentes, não tenhamos dúvidas do facto, nem do que daí resultou e resultará.

Tenho a grande honra e acrescentado prazer de ser Director da Técnica,

Na Técnica se publicaram, muitas vezes, as novidades científicas que, então, ainda, incipientes, ganhariam vasta e extraordinária dimensão e influência.

Essa consciência científica da Técnica deve-se aos professores do Instituto que nela colaboraram desde a primeira hora.

A Técnica é uma revista portuguesa, de estudantes, escrita por professores, e não exactamente de modo total para os estudantes mais novos. É um bom investimento, no entanto, para o futuro e uso desses mesmos estudantes.

Numa tendência para certo derrotismo, numa vaidade sem ter de quê, nem sempre é analisada até às raízes onde se alimenta, nem sempre se acorre à Técnica. É pena. É mau para o pensamento científico português. É mau exemplo que não ajuda a frutificar outras revistas similares.

No entanto, a Técnica viaja, pedem-nos separatas de além fronteiras".

Destas palavras, até hoje, decorreram quase 10 anos.

A Investigação Científica no I.S.T. cresceu e afirmou-se, são muitos os alunos de pós-graduação que nela se envolvem: de Mestrado, de Doutoramento.

No Editorial do último número entendemos dever, ser importante, salientar a relação que a Revista estabeleceu com esses alunos de pós-graduação.

"Se desta actividade se infere o nível científico e técnico do I.S.T., infere-se também o que, de idêntico se construiu para a Técnica.

Hoje, evidência do presente, marca maior do futuro que começa, assinalamos a confiança com que os alunos de pós-graduação nos procuraram.

A sua contribuição nunca terá a restrição da quantidade mas e só a aceitação da qualidade".

Somos em espírito e intensão tal como nascemos. Traduzimos na nossa estrutura e colaboradores a circunstância em que nos inserimos.

Os problemas maiores surgem, oferecem-se, quando sujeitamos a forma indefinida das equações às condições fronteiras associadas a um dado problema.

O mais difícil e profícuo é conseguir e resolver na circunstância, não inventando impossibilidade, nem nova circunstância, para o que já pode ser.

Sábio será, talvez, buscar a generalidade, pelas muitas e diversas contribuições, do particular estudado e tratado em profundidade.

Esperamos e desejamos a colaboração de todos.

Editorial a editorial temos dado conta dos nossos problemas, dos nossos planos de evolução.

É nosso dever agradecer profundamente o auxílio que temos recebido do Conselho Directivo do I.S.T. e do seu Presidente, da AEIST e da sua Presidência.

Simbolicamente, na capa desta revista comemorativa dos 70 anos do I.S.T., figuram, afirmam-se círculos, que são anos de vida de uma árvore. De uma vida que cresce e se consolida e que poderá ir além do efémero e transitório de cada um de nós.

"Ad multos annos"

Lisboa, I.S.T., 5 de Dezembro de 1995

AD MULTOS ANNOS!

J. FERNANDO DE SOUZA
Presidente da Associação dos Engenheiros Civis Portugueses
Publicado na Técnica n.º 1 de Dezembro de 1925

Quiz a gentileza de um grupo de rapazes estudiosos e de boa vontade, empenhados em crear na imprensa técnica um orgão das especialidades que cultivam, confiar-me a honrosa missão de o apresentar ao publico num anteloquio.

Nem a revista carece de apresentação, nem a minha humilde prosa lhe grangeará melhor acolhimento. Te-lo-há pelos méritos proprios, que não pelo reclamo de quem por um lance providencial encontrou logo no inicio da sua longa labuta jornalística (mais de trinta anos rolaram já sobre os meus primeiros escritos!)., um pseudónimo literário, que era uma definição profética. *Nemo:* ninguem; uma boa vontade humilde posta ao serviço de firmes convicções, terçando armas pela Verdade, que era a deusa dos seus pensamentos.

Borboleteando por todos os assuntos que a sucessão dos acontecimentos me oferecia á visão intelectual no agitado kaleidoscópio da vida contemporanea, mereciam-me decidida predilecção os problemas da vasta especialidade em que por dever de oficio exercia a minha actividade.

Engenheiro de caminhos de ferro há trinta e cinco anos, amando apaixonadamente esse campo vasto do meu labor profissional, quer na imprensa diária, quer na velha *Gazeta de Caminhos de Ferro,* defrontei dia a dia com os problemas que suscitavam a construcção e exploração dos caminhos de ferro, instrumento primacial do nosso progresso económico.

Foi mais vivida que escrita a série dos meus pobres estudos técnicos de ocasião.

Surgiam a proposito das questões práticas, que em prol da actividade nacional importava resolver. Eram, por assim dizer, a florescencia ocasional da planta, que enraizava no solo, bracejando açoitada pelo vento. Trabalhos críticos e de polémica, mais que serenos estudos didácticos que algo viessem acrescentar ao tesouro do saber profissional, perdiam o interesse, quais efémeras rosas de Malherbe, com o dobar do tempo.

Sou talvez o decano dos engenheiros portugueses de caminhos de ferro, um dos raros sobreviventes da legião de profissionais que neles exerceram a sua actividade.

A edade em que me encontro, duplamente avançada pelos anos vividos e pelos kilómetros andados, seria título mais que suficiente para a conquista do repouso e do recolhimento contemplativo, em que me preparasse para a grande viajem, evitando choques e descarrilamentos e meditando a luminosa sentença de um glorioso velho, que aos oitenta anos escrevia o seu ultimo e formoso livro: *"o christão não é um homem que acaba; é um imortal que começa."*

Não me consente, porém, o ânimo, nem me permitem as circunstancias, esse descanço a que todos aspiram. Forçado das galés d'imprensa, realiso, por viciosa devoção jornalistica, quer queira, quer não queira, a sentença do velho mestre: *nulla dies sine linea.*

Cada dia tenho que exercer o convívio intelectual numa tribuna amada com alguns milhares de leitores, em poligrafia obrigatoria, que perde em profundeza o que lhe sobeja em extensão.

Como imitar pois o pae de família da parábola evangélica, que do seu tesouro tira coisas velhas e novas? Como corresponder á captivante amabilidade do convite com um artigo que seja condigno adito do edificio intelectual que se pretende erigir nesta revista técnica?

Demais me ocupei porem de mim, iludindo as dificuldades da missão aceite.

Falemos só da obra que ora começa.

Sofreram profunda e benéfica transformação entre nós os estudos para a formação profissional do engenheiro.

Outrora a Escola Politécnica realisava nos seus cursos preparatorios a promiscuidade dos aspirantes a multiplas carreiras.

Engenheiros civis e militares, artilheiros, oficiais do Estado Maior, médicos, cultores da sciencia pura, passavam pela mesma fieira, versavam as matematicas superiores, as sciencias fisicas e naturais, sob os mesmos aspectos de generalidade, sem sombra de especialisação.

O mesmo sucedia na Escola do Exército, nos cursos de aplicação, onde frequentavam as mesmas cadeiras os engenheiros civis e os oficiais das diversas armas.

Para os próprios engenheiros não havia diferenciação de especialidades. Construcções civis, estradas, caminhos de ferro, telégrafos e faroes, resistencia de materiais, estabilidade de construcções, hidraulica pura e aplicada, vias de navegação interior, portos maritimos: tudo isso figurava no programa de estudos de todos os nossos engenheiros, Picos de Mirandola por decreto oficial, que no vasto e complexo campo da profissão o obrigava a discretear *de omni re scibili et quibusdam aliis.*

A esta falta de diferenciação dos estudos conforme os ramos da profissão juntava-se a exiguidade dos trabalhos práticos, limitados á resolução livresca de alguns problemas de aplicação nas salas de estudos sob a direcção de homens por vezes faltos do *saber de experiencias feito,* e a missões nas férias sem uma orientação profícua.

Seguiu-se outro rumo na nova escola, em que se instituiu o curso comum de preparação geral, seguido das especialidades ramificadas, tudo acompanhado de mais intensos trabalhos práticos.

Atingiu-se a perfeição a despeito das vergonhosas condições de instalação material da nossa principal escola técnica?

Ignoro-o. Sei porém que se realisou um progresso real, considerável, que a aparição desta revista vem testemunhar.

Em compensação peorou a preparação secundária nos liceus. Menosprezou-se a importancia das humanidades para a formação intelectual. Uma luxuriante vegetação parasitaria das sciencias matematicas, fisicas, naturais, fatigante para a maioria, sufocou os estudos literários e filosóficos.

Dir-se-ia que se tinha em vista, não educar homens, mas suscitar apenas a *brute polytechnique*, não sabendo pensar nem raciocinar, escrevendo como uma cosinheira, falho de disciplina mental, incapaz de versar estudos superiores sem a muleta do explicador.

Essa deficiencia de formação era felizmente suprida pela vivacidade de espírito e faculdades assimilativas, características da nossa raça.

À revista técnica, vinda agora a lume, será o reflexo da formação profissional dos nossos engenheiros, o testemunho do esmero havido em os preparar para o seu mester.

Em vesperas do exercicio da profissão vem uma plêiade de ardorosos rapazes, ala dos namorados da novel engenharia, versar os problemas da sciencia pura e aplicada que se relacionam com a missão a que se dedicam. Incentivo para o estudo pode e há de ser tambem a revista, util repositório de conhecimentos e instrumento do progresso técnico, tão necessario no nosso acanhado meio industrial.

Não só os assumptos técnicos, no rigor restrictivo do termo, devem ser aqui versados. A arte do engenheiro, essencialmente prática, não constitui labor especulativo de sabios e doutrinadores no remanso do gabinete de estudo ou na solene cátedra academica.

Tem de se adequar ás condições económicas, financeiras, administrativos do meio, os recursos e exigencias do campo industrial em que se exerce.

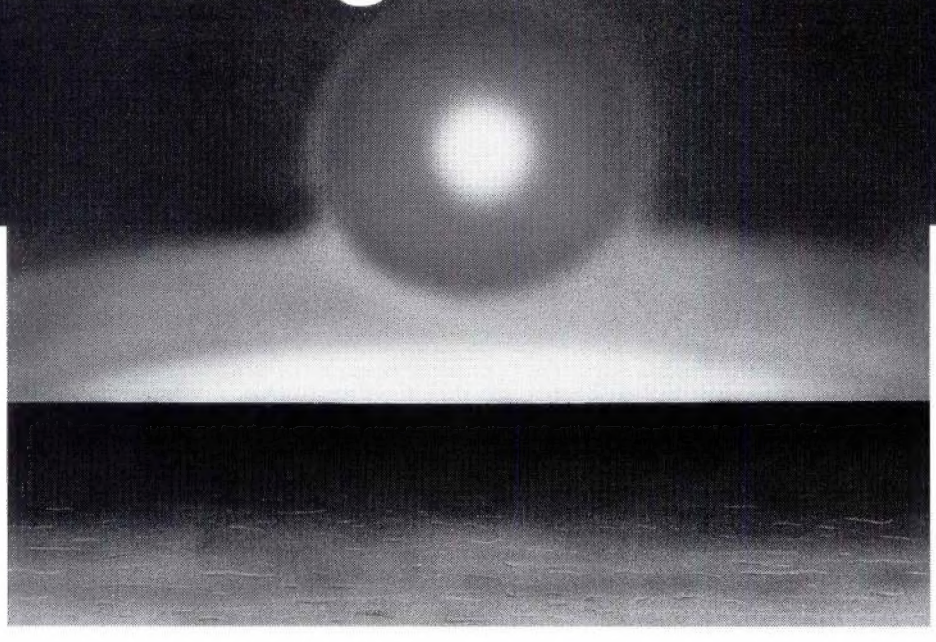
Devem pois os estudos dessa índole ter lugar honroso na revista, muito particularmente quanto aos nossos caminhos de ferro.

A sua naturesa de instrumentos de serviço público de transportes, constituindo forçosamente um monopolio, fez surgir variados problemas economicos e administrativos, que importa resolver em forçosa e intima conexão com os seus aspectos técnicos.

De alguns me ocuparia de boamente, se as reflexões preambulares que prolixamente expuz não excedessem já as proporções, além das quais caíria sob a alçada do codigo penal pelo delicto de abuso de hospitalidade.

Ponhamos-lhes pois termo, agradecendo a imerecida honra que se nos conferiu e fazendo votos pela próspera e longa vida da revista para lustre da engenharia portuguesa e do Instituto, votos que exprimirei pela consagrada aclamação: *Ad multos annos!*

Temos Soluções Inovadoras Utilizamos Tecnologias de Ponta



Damos Luz às suas Ambições Profissionais

Cobrimos todas as áreas da Engenharia.
Utilizamos tecnologia de ponta em todas as especialidades.
Desenvolvemos projectos de investigação.
Integramos o progresso.
Distinguimos a competência.

Bozell

GRUPO EDP

MODERNAS CONCEPÇÕES DA MECÂNICA!

AURELIANO DE MIRA FERNANDES

Lições feitas no Instituto de Altos Estudos da Academia das Ciências de Lisboa, nos dias 1 e 4 de Fevereiro de 1933. Professor do Instituto Superior Técnico
Publicadas nas Técnicas n.º 50, 51, 52 e 53 em Março, Abril, Maio e Junho de 1933

Nessa formosa alegoria sobre a peregrinação e destino da alma, que é a parte mais bela do *Phedro* de Platão, compara Sócrates a dolorosa gestação das asas do entendimento ao abrolhar inquieto da dentição infantil. E assim é. Feito à custa de indizíveis tormentos, de cruciantes perplexidades, de dolorosos suplícios no produzir e infindáveis hesitações no afirmar, o saber humano gera-se numa aflitiva tortura e engrandece-se numa permanente intranquilidade. Quando se lhe afigura incontestável a posse dum domínio científico, pela adaptação perfeita da teoria à experiência, vem, quase sempre, um mais cuidadoso exame do raciocínio revelar discordâncias que a inevitável imperfeição experimental não comporta; ou vem um aperfeiçoamento da experiência pôr em dúvida a verosimilhança da teoria. E ainda aquele saber que se não louva na confirmação dos sentidos, porque é meramente especulativo e concepcional, tem nas suas definições e postulados, que são os fundamentos de toda a sua estrutura, abundante matéria de crítica e invencíveis razões de suspeitosa impaciência.

Contingente e precária, como os agentes espirituais que lhe deram o ser, lhe alentaram o crescimento, lhe animaram a consciência dos seus direitos e a fé nos seus destinos, a ciência humana tem sentido, na sua longa evolução, todos os triunfos, todos os percalços, todas as dúvidas. Têm-na engrandecido inesperadas revelações do génio e laboriosas pesquisas de obstinada perseverança; têm-na quebrantado enganosas ousadias e imprudentes assertos; têm-na surpreendido inquietantes incertezas e amargas desilusões. Mas é consolador indício de seguro progredimento que, dia a dia, a maiores temeridades correspondam menos cruéis dissabores; e testemunho iniludível de progressiva estabilidade que o declínio das teorias atinja, cada vez menos, a substância do conhecimento científico. O que fica de pé, quando as teorias vacilam e baqueiam, o conjunto das relações invariantes de uma teoria para outra, pecúlio perdurável do saber, é cada vez mais extenso, mais sólido e mais claro: extensão que deve interpretar-se como sinal de que nos avizinhamos da verdade; solidez e clareza que são feliz augúrio de perfeição. E não atribuamos à ciência responsabilidades que lhe não pertencem na génese dessa torturante inquietação que é a mais vincada característica das gerações de hoje. A liberdade de exame e de crítica, que necessàriamente condiciona o seu desenvolvimento e assegura o seu valor, não é subordinável a paradigmas morais; nem há que imputar à ciência impedimentos de estruturação de uma moral científica. O que a ambas, moral e ciência, importa possuir, é sinceridade e independência: nem interdições de análise, nem prescrições de itinerário; nem transigências de raciocínio, nem coacções de finalidade. E, dentro destes princípios, não é possível uma colisão de valores, que seria contraditória com a separação dos seus domínios.

Nessa tormentosa jornada em demanda da verdade tem sido a mecânica uma das disciplinas científicas de mais acidentada evolução e mais melindrosa conquista. Porquê?

Em primeiro lugar, porque a textura dos seus postulados não tem a intuição flagrante que caracteriza, por exemplo, os postulados geométricos. Encobertos pela complexidade das aparências, dissimulados pela permanente vicissitude que é todo o fenómeno de movimento, só à custa de minúcias de análise e sagacidades de crítica conseguiram direitos de primazia e foros de legalidade. Em segundo lugar porque a mecânica serve de indispensável alicerce a todas as ciências de *previsão e medida:* o que exige a conciliação dos seus princípios e das suas leis com todos os dados experimentais. E, precisamente, por serem verdades comuns a numerosos campos doutrinários, os seus postulados não podem afirmar o que é apenas particular e relativo a qualquer deles. Em terceiro lugar, finalmente, porque o estudo do movimento é condicionado por uma aparelhagem matemática que só muito tarde veio a constituir-se. E é curioso constatar, entre a análise e a mecânica, desde esse fecundo e renovador século XVII, a competência de auxílio, o paralelismo de evolução e a concordância de destinos.

É sabido que a ciência do movimento só começou a ter prerrogativas de maioridade, quando atingiu o exame *quantitativo* e *causal* dos fenómenos naturais. Quase exclusivamente *descritiva* e *qualitativa,* a ciência da antiguidade clássica, apurada e comentada pelo escolasticismo, criou esse notável monumento que é a geometria grega, e estabeleceu com acertado critério, as leis de alguns fenómenos de equilíbrio. De resto, a resolução dum problema de estática é a dum problema geométrico, acrescida duma determinação causal; e nem sempre o equívoco na definição das causas perturba ou invalida a realidade das consequências. Por isso a estática, na esteira da geometria, pôde alcançar uma adolescência precoce, quando a dinâmica era ainda aquela fantasia subtil e caprichosa que pode ler-se na *Física* de Aristóteles. E, no entanto, a estática, sem a dinâmica, é um corpo sem vida: incapaz de prever a sucessão dos fenómenos, inábil para determinar as suas afinidades.

E é essa a razão porque a mecânica só adquiriu categoria científica com a criação da dinâmica, devida principalmente a Galileu e Newton; o primeiro, definindo, por uma intuição genial, o conceito de aceleração; o segundo, estabelecendo os postulados da dinâmica clássica, e tirando deles, pela utilização dos algoritmos da análise infinitesimal, de que fora o principal progenitor, as leis fundamentais da ciência do movimento. Esta foi a segunda grande prestação de auxílio das matemáticas puras à mecânica: a primeira foi o amparo dispensado pela geometria de Euclides à estática de Arquimedes. Advertirei que já aqui se manifesta a reciprocidade de serviços a que atrás aludi: a descoberta dos princípios do cálculo infinitesimal foi, sobretudo, inspirada pela observação dos fenómenos do movimento; e o conceito de aceleração, deduzido por Galileu das suas notáveis experiências sobre a queda dos graves, teria sido, meio século depois, sem nenhum fundamento experimental, um simples facto analítico. Mas Galileu é anterior à criação dos métodos infinitesimais: morreu no mesmo ano em que nasceu Newton. E a genialidade da sua obra não está apenas na inexcedível intuição do seu labor experimental: está também, e talvez sobretudo, no extraordinário poder de iluminado com que o seu talento supria a falta dum instrumento analítico indispensável à edificação racional da mecânica. Não resisto à tentação, embora abusando da condescendência dos que me escutam, de citar um exemplo, por todos conhecido, da sublime inspiração do seu génio. Como se sabe, para os escolásticos, a velocidade dum ponto material era *produzida,* a

cada instante, pela vizinhança de outros pontos materiais. Para eles não havia velocidade adquirida: um ponto material do qual, num dado instante, se afastassem infinitamente todos os outros, ficaria em repouso. Para a mecânica newtoniana, a presença de outros pontos materiais *modifica*, a cada instante, em grandeza e direcção, a velocidade do ponto considerado; de sorte que a ausência brusca desses pontos vizinhos deixaria o ponto em movimento rectilíneo e uniforme. Divergência fundamental entre as duas escolas, esta do conceito de inércia. Pois bem: Galileu admitia que a *força* exercida por um ponto material sobre outro vizinho depende apenas das suas posições relativas e não das suas velocidades. E ninguém desconhece a influência por este princípio exercida na elaboração da mecânica clássica. ¿Era uma afirmação de origem experimental? Não se vê bem de que experiências ele a teria inferido. ¿Era uma reminiscência do escolasticismo, em cujas doutrinas se iniciara a sua formação espiritual? Assim o conjectura Painlevé, com judiciosas razões. Mas onde os escolásticos afirmavam que a velocidade dum ponto material é *causada* pelos pontos vizinhos, Galileu assegurava que a acção desses pontos não é *influenciada* pela velocidade que o ponto já possui. Para ele a força ainda não é, como para Newton, uma causa apenas *modificadora* e não *eficiente* da velocidade: mas a velocidade também não é causa eficiente da força. E ¿não representará esta asserção meio caminho andado para o estabelecimento da concepção newtoniana de que o movimento ulterior a um dado instante é o efeito desses dois agentes, força actuante e velocidade adquirida? A separação dos dois conceitos, na génese dos fenómenos dinâmicos, foi Galileu quem a iniciou. E ninguém dirá que ela não foi, sem o auxílio da análise e sem um fundamento experimental que se não descortina, uma revelação de génio.

Não é meu intento, nem sequer a título de simples comemoração, a referência, mesmo sumária, do que foram os progressos da mecânica newtoniana até aos primeiros anos deste século; o exame, embora rápido e ligeiro, da sua carreira triunfal. Não caberiam, essa referência e esse exame, nos moldes desta exposição, nem seriam próprios da índole deste curso e da alta cultura daqueles que têm a paciência de me ouvir.

Attamen errores non sunt artis, sed artificium, diz Newton, no prefácio da sua obra monumental *Philosophiae naturalis principia mathematica* ao estabelecer as relações da Geometria com a Mecânica, no sentido que esta palavra tinha no seu tempo.

Queria ele acentuar a inevitável imperfeição da experiência e a necessidade de construir uma ciência racional do movimento. Como essa ciência se criou, progrediu, fortaleceu e frutificou nas mais fecundas teorias e nos mais belos grangeios do engenho humano, é por todos sabido. Logo na primeira infância, é o mesmo Newton quem lhe assegura pergaminhos de nobreza e lhe certifica natural robustez com a teoria da gravitação universal, tão rica pelas suas consequências, como formosa pela sua simplicidade. Já na adolescência, é Lagrange quem lhe exalta a elegância, aperfeiçoando-lhe a indumentária analítica e lhe aumenta a distinção, disciplinando-lhe os métodos. Da sua primogénita, a Mecânica Celeste, que nasceu adulta como a Minerva da fábula, é Laplace o principal sistematizador, criando, com ela, o mais sólido apoio das doutrinas de Newton, e forjando um modelo que havia de servir, até aos nossos dias, à estruturação teórica dos mais variados domínios científicos. ¡E que modelo! Deve-lhe a ciência do século XIX, a par dos enormes benefícios que ao seu engrandecimento trouxeram as doutrinas mecanistas, este inolvidável serviço: a concepção da lei física como relação de estados infinita-

TEORIA 4 DEZ 95

mente vizinhos; como norma de conexão infinitesimal. A génese deste conceito estava, de resto, na lógica dos mesmos princípios que à mecânica servem de fundamento; era um corolário da necessária subordinação das teorias mecânicas à análise matemática. E desde então a lei física teve a sua tradução analítica numa equação diferencial.

Foi nesses moldes da mecânica celeste que se vasaram as primeiras teorias da Física Matemática, a começar pela dos fenómenos capilares, do mesmo Laplace. O seu êxito na análise e previsão dos movimentos planetários, a simplicidade da concepção e a fertilidade de consequências de todas as leis de forças centrais, cuja grandeza é função apenas da distância, fizeram deste paradigma (além de tudo mais, por essa *aspiração de unidade*, sobre a qual o espírito humano se compraz em construir um ideal de perfeição), um modelo, quase universal de arquitectura científica, desde os fins do século XVIII até aos tempos modernos. E ainda quando as grandes crises de crescimento e renovação vieram sobressaltar os conceitos mecanistas, houve quem não perdesse a fé numa futura consagração da sua solidez. Já em nossos dias, e com as restrições de discontinuidade da teoria quântica, o átomo de Bohr é um sistema laplaciano.

Das crises a que há pouco aludi, originadas na aparente insuficiência do modelo dinâmico das forças centrais para a completa explicação de alguns fenómenos físicos, a primeira foi procurar soluções tão interessantes pela sua originalidade como pelo seu alcance filosófico. Foi uma crise de regime.

A teoria mecanista criara, como ilação lógica dos seus postulados, um certo número de princípios gerais (conservação da energia, menor acção, relatividade, etc.), aos quais vieram juntar-se outros de menos mediata origem experimental, como o princípio de Carnot e a lei da conservação da massa. Fortalecidos pela generalidade da sua observância, ¿porque não seriam eles as normas do raciocínio, os preceitos dirigentes, as leis invioláveis da construção científica? Se eles se verificavam sempre, como resultados da experiência, ¿porque não havíamos de adoptá-los, como fundamentos da teoria?

¿Não tinham poder suficiente de evidência que os acreditasse como postulados? Mas tinham garantias de veracidade em todo o passado da ciência do movimento. ¿Onde estava, de resto, essa nitidez de evidência nos princípios sobre que se estabelecera a mecânica das forças centrais?

E assim se fundou a Mecânica das *Grandes Leis*, que deu à ciência, entre outras, a teoria electromagnética da luz.

Não discutamos a grandeza dos seus triunfos, a oportunidade do seu aparecimento, a fecundidade do seu labor. Mas não esqueçamos que o incremento da sua capacidade de previsão e medida foi conquistado à custa dum doloroso sacrifício: a desistência de acompanhar os fenómenos em todas as minúcias do seu desenvolvimento, na continuidade da sua essência, na intimidade da sua marcha, no segredo da sua gestação. ¿Circunstância de menor valia, na aquisição da verdade final, única valiosa e apetecida? Talvez. Mas, em todo o caso, insuficiência de conhecimento. E, por isso, subsistiu, como já disse, em tantos espíritos, a crença numa vitória final das doutrinas mecanistas. Mal pensavam eles que a nova crise, atingindo quase todas as grandes leis, duma maneira directa ou reflexa, havia de criar à ciência as inesperadas e perturbantes atitudes da hora presente; que a sua solução não estava num regresso ao passado, embora com mais aperfeiçoados utensílios de análise; mas sim numa renovação radical de conceitos e hábitos que, por uma longa ancestralidade e pelas aparências do meio ambiente, se tinham consolidado no espírito dos investigadores.

Ao dealbar da era nova, nas vésperas da grande revolução científica a que estamos assistindo, vinha oferecer os seus serviços à Mecânica o Cálculo das Probabilidades. Já adulto, e senhor de vastos domínios, dele se servia Gibbs para lançar os fundamentos da Mecânica Estatística, onde as leis dos fenómenos aparecem como uma consequência da lei dos grandes números. A tradução analítica da lei física já não é dada apenas por um sistema de equações ou inequações diferenciais, consignando os postulados da mecânica newtoniana, ou exprimindo as condições de estacionaridade duma certa funcional: é feita também à custa de determinadas funções estatísticas. E a utilidade algorítmica deste conceito havia de engrandecer-se e adornar-se de inesperados valores na construção das teorias modernas.

Dou por finda, meus senhores, esta breve *alusão* às doutrinas do passado. Como adverti, não tem sequer pretensões de sumária referência, quanto mais de ligeiro exame. Mas tem um intuito, que, em minha opinião, lhe atenua o atrevimento. E é este: acentuar que, em face das novas teorias e concepções da mecânica, ainda em trabalhoso apuramento e delicada instabilidade, a velha ciência do movimento é quase sempre um guia, a todo o instante uma advertência e muitas vezes um recurso.

Propuz-me expor, num pequeno número de lições, as ideias gerais que neste momento dominam a teoria relativista e a mecânica quântica. Essa exposição, necessariamente elucidada por desenvolvimentos de cálculo, será feita noutro lugar, àqueles a quem interessarem minudências de especulação. Para aqui trago apenas, a título de sumário, o breve relato dos seus principais conceitos; e a título de admissão num grémio de Altos Estudos, a débil contribuição pessoal do meu esforço. O primeiro é justificado pela necessidade de esclarecer convenientemente a segunda. Por isso, a mesma insignificância dos propósitos me obriga a mais demorada exposição.

RELATIVIDADE

O mérito primacial das doutrinas de Copérnico está na destruição do grosseiro prejuízo de que a Terra devia ter um significado absoluto, como sistema de referência dos movimentos. A negação desse privilégio, feita no campo cinemático, foi confirmada pela obra de Newton no campo da dinâmica. ¿De que maneira? Formulando, na lei da atracção universal, a explicação das leis de Kepler. Foi grande a importância que teve a extinção dessa prerrogativa nos progressos da mecânica. Mas não foi menor o seu valor no campo filosófico, afirmando, pela primeira vez, um princípio de liberdade de referência, cuja limitação devia apenas subordinar-se a razões de comodidade na análise e de simplicidade na expressão das leis. E todos aqueles que já resolveram problemas de mecânica sabem como a adequada escolha do sistema de referência esclarece e facilita a resolução, orienta e inspira o raciocínio; porque o sistema de referência é, no domínio especulativo, uma perspectiva. Pois bem: o princípio da relatividade da mecânica clássica afirmava que essa perspectiva das leis dinâmicas é a mesma para dois sistemas de referência que estão animados, um em relação ao outro, duma translacção rectilínea e uniforme. E ele é uma consequência imediata da circunstância de ter a lei geral da dinâmica, como característica cinemática, a aceleração e esta ser a mesma em relação a *ambos os* sistemas.

Na passagem deste princípio para o conceito relativista de Einstein, há um amontoado de ruínas, sobre as quais desvaira uma multidão de fantasmas. São ruínas as concepções do espaço e do tempo sobre as quais se sistematizou a geometria grega e a mecânica clássica; é uma ruína também o velho conceito substancial de matéria, invariante

fundamental de todas as transformações. E sobre os seus despojos, vagueiam os espectros das antigas ideias de energia e força, esbulhadas dos seus privilégios, decaídas da sua soberania. Dos três agentes desta formidável revolução, filosófico, matemático e físico, não foi, talvez, o matemático o de menor eficácia e galhardia. Por isso ela se nos afigura, se não definitiva nas suas conclusões, pelo menos fortemente apoiada nos seus embasamentos.

E, no entanto, torna-se necessário um certo esforço, demolidor de velhos preconceitos e falsas evidências, para nos adaptarmos às novas doutrinas; porque há nelas, até certo ponto, uma nova concepção da realidade.

Foi Riemann, na sua célebre tese *Sobre as hipóteses que servem de fundamento à Geometria* e como consequência das suas vistas geniais sobre o conceito de espaço, quem primeiro advertiu o *punctum saliens* da imperfeição das teorias clássicas, posta a claro, em nossos dias e por caminhos diversos, pela obra de Einstein.

No final dessa notável *Memória*, o ilustre criador das geometrias de espaço heterogéneo acentua que, se o espaço é uma multiplicidade contínua, a *causa* das relações métricas, nele definidas pela forma fundamental, deve ser procurada fora da multiplicidade, *nas forças de ligação que nela actuam*. Está aqui a afirmação de que a métrica espacial é determinada pelos fenómenos que no espaço se produzem; o espaço, em si, é uma variedade amorfa, e é apenas *o que nele existe* que lhe dá forma e confere padrões de medida. ¡Como tudo isto é claro, mesmo para aqueles que apenas conhecem nas suas linhas gerais a etiologia do pensamento einsteineano! ¡E como tudo isto foi, o que não admira, absolutamente incompreensível para os contemporâneos de Riemann!

E para o mesmo Riemann, que na sua obra não desenvolve as consequências do seu genial asserto, teria sido impossível a sistematização do universo, enquanto o considerasse uma simples variedade a três dimensões, de carácter espacial e não uma variedade quatridimensional: o *espaço-tempo*. Porque é só numa tal variedade que as leis dos fenómenos podem ser formuladas dum modo invariante, em relação a todos os sistemas de coordenadas, de harmonia com o princípio da relatividade; e, sem esse princípio, sem essa invariância, não teria sido possível a Einstein atribuir à gravitação o papel de regulador das relações métricas.

Por outras palavras: a geometria diferencial de Riemann, definindo a métrica dos espaços abstractos por uma forma diferencial, cujos coeficientes são funções das coordenadas, só podia ser útil à estruturação da métrica do espaço físico, quando o tempo deixasse de ser uma coordenada excepcional e privilegiada, passando a figurar, como qualquer outra, na determinação local dos pontos do Universo; e tirando assim todo o significado ao conceito clássico de simultaneidade.

Como todos sabem, o edifício da mecânica einsteineana, que teve, no campo experimental, o valioso apoio de algumas experiências célebres, entre elas a de Michelson-Morley, precisava, no campo matemático, de um algoritmo adequado à representação das leis dos fenómenos sob forma invariante. A criação desse algoritmo, que é o *cálculo diferencial absoluto*, deve-se a Ricci e Levi-Cívita, que lançaram os seus fundamentos no princípio deste século.

E, se é certo que ele já tinha, na hora própria, o desenvolvimento necessário à prestação de serviços que a doutrina relativista lhe pedia, não é menos verdade que esta tenha sido a principal determinante do seu rápido incremento e da sua definitiva estruturação. Sobre ele assenta toda a moderna Geometria diferencial de Schouten, Blaschke, Weyl e Cartan (para não citar senão astros de primeira grandeza) e à sua custa se alargaram enormemente os conceitos espaciais de Riemann

A noção de transporte paralelo, definida, para os espaços de Riemann, por Levi-Cívita, à custa duma variedade euclideana ambiente, serviu de base, principalmente a Struick e Schouten, para a definição de todas as leis lineares de transporte; e, a cada uma dessas leis, a métrica faz corresponder uma estrutura espacial diferente. Teremos ocasião de ver, dentro em breve, como é possível escolher, entre essas diversas estruturas de conexão linear, alguma que permita, atribuída ao universo físico, a inclusão dos fenómenos electromagnéticos, a par dos fenómenos gravitatórios, na determinação das relações métricas do espaço; atingindo-se assim essa concepção unitária, ideal de perfeição e de síntese, que tem sido, nos últimos anos, uma das maiores curiosidades da especulação científica.

[...]

E, como a experiência de Michelson-Morley (entre outras) inculca, para a luz, esta invariância de velocidade, em relação ao sistema de referência, eis a razão porque a teoria da relatividade adopta, para valor da constante *c*, a velocidade da luz.

E aqui estão, meus senhores, bem evidentes como consequências do segundo princípio variacional, aquelas ruínas, a que há pouco aludi, dos conceitos clássicos da mecânica. A massa deixou de ser uma constante; a energia inclui uma parcela adicional (a energia intrínseca), cujo significado físico é justificado pelas propriedades radioactivas; os velhos conceitos distintos de espaço e tempo fundiram-se num só: a variedade cronotópica, suporte de todos os fenómenos do mundo físico; o princípio de inércia subsiste, mas há uma velocidade limite, que é a mesma para todos os sistemas de referência; a lei da composição de velocidades deixou de ter a forma aditiva simples da cinemática clássica; e as trajectórias dos raios luminosos são as geodésicas de comprimento nulo da métrica do cronótopo e, como tais, determinadas pelos *agentes* dessa métrica.

¿Onde havemos de ir procurar esses agentes?

Como se sabe, a mecânica newtoniana atribuía ao espaço absoluto, aquele a que os seus postulados se reportam, a origem das forças de inércia. A teoria da relatividade restrita, por Einstein formulada antes da teoria geral, considerava a métrica do universo como determinante dessas forças de inércia, mas supunha a métrica uma propriedade meramente *formal* do espaço-tempo. O aperfeiçoamento da teoria impunha um passo decisivo: atribuir a essa métrica uma *realidade*, como geradora, que é, doutras *realidades:* as forças de inércia.

Mas se a métrica é uma realidade, ela deve sofrer a influência da matéria que no espaço se encontra. E devemos, portanto, recorrer à concepção riemanniana da determinação da estrutura métrica pelo *conteúdo espacial*. Sòmente, agora (e essa é uma indispensável condição de seguro exame) o *espaço continente* não é a multiplicidade tridimensional de Riemann; é o cronótopo de Einstein-Minkowski.

E assim se chegou a essa maravilhosa síntese que é a *teoria da relatividade geral.*

[...]

Terminei, meus senhores, as minhas resumidas considerações sobre a estrutura do espaço físico. Atingiu-se o ideal de Riemann da subordinação de todos os fenómenos físicos a uma concepção geométrica; e, inversamente, da determinação da geometria do cronótopo pelo conteúdo espacial. O princípio de *unidade*, como ideal científico e filosófico, fica visivelmente robustecido e dignificado. E ficam também, agora como sempre, os domínios do pensamento matemático sobejamente apetrechados para uma possível interpretação de futuras exigências da teoria física.

Singular destino este, o duma ciência cuja evolução é, em regra, tanto mais interessante quanto mais desinteressada!

Foi, de princípio, um simples instrumento, baseado na intuição, criado à semelhança das realidades sensíveis que apenas lhe pediam um adequado algoritmo de contar e medir. Alargou os seus domínios, ao mesmo tempo que afirmava a sua autonomia, como ciência abstracta; e ampliou a sua capacidade formal, *pari passu* com o engrandecimento da sua riqueza doutrinária. Ao seu progresso, por vezes interrompido, esteve sempre subordinado o laborioso evoluir das ciências físicas; e as suas reservas, acumuladas com isenção e dispensadas com munificência, têm sido aviso e vaticínio, auxílio fecundo e garantia segura do saber humano. E agora, nesta concepção geométrica da teoria unitária, já se lhe não confere apenas a incumbência duma simples interpretação; atribui-se-lhe o encargo duma representação total dos fenómenos físicos. E esse encargo não é sòmente assumido com galhardia e desempenhado com êxito: ficam definidas infinitas estruturas espaciais, compatíveis com a representação dos fenómenos conhecidos, entre as quais poderá escolher-se a que melhor se adapte à figuração de novos conceitos e doutrinas. Admirável opulência e abençoada prodigalidade!

MECÂNICA QUÂNTICA

Ao findar o século XIX, não era apenas da mecânica newtoniana o senhorio incontestado dos domínios da ciência. Partilhava-os com ela, na explicação doutra categoria de fenómenos, a teoria ondulatória de Maxwell-Hertz. Fundada por Huygens e Descartes, sistematizada no princípio de Fermat, em termos de evidente analogia com o princípio variacional de Hamilton, a teoria ondulatória, graças à explicação dos fenómenos de interferência e, sobretudo, à concepção mecânica da propagação de Fresnel, levava de vencida, no princípio deste século, a teoria corpuscular de Newton. Com a criação da teoria electromagnética de Maxwell e Hertz, com a descoberta dos electrões por J. J. Thomson e a sua introdução na teoria de Maxwell, realizada por Lorentz, a teoria da luz ficou incluída nas equações do campo electromagnético. Mas tal era a fé nas doutrinas mecanistas que os mesmos fundadores da teoria nova desde logo procuraram uma mecanização do éter que permitisse dar aos fenómenos da electróptica uma explicação mecânica.

E no entanto, embora sem a irrevogável decisão das doutrinas modernas, outros conceitos tinham já combalido fortemente, em pleno século XIX, os fundamentos da teoria mecânica. Nos fins do seu primeiro quartel, Sadi-Carnot fundava a termodinâmica; e, se o princípio de equivalência era de relativamente fácil interpretação mecanista, outro tanto não acontecia ao princípio de Carnot. O conceito de entropia, entre outros, não era fàcilmente subordinável às velhas concepções da mecânica newtoniana. Foi a mecânica estatística de Gibbs e Boltzmann, a que já fiz referência, que veio dar interpretação mecânica às funções termodinâmicas, à custa, bem entendido, de iniludíveis sacrifícios da concepção clássica.

Vivia-se a época das *Grandes Leis* e, com o auxílio do Cálculo das probabilidades, criava-se um instrumento novo de análise dos fenómenos mecânicos, cuja fecundidade mal imaginavam os seus construtores.

Já no fim da vida, o grande Lord Kelvin, analisando as dificuldades de encorporação de toda a ciência física dentro da doutrina mecanista, mesmo alterada pelas transigências a que há pouco aludi, acentuava dois factos experimentais cuja explicação, dentro da mecânica newtoniana, se lhe afigurava impossível ¿E quais eram eles?

A constância da velocidade da luz, averiguada na experiência de Michelson e a distribuição da energia no espectro do corpo negro. Precisamente os dois fenómenos que haviam de servir de base à estruturação das duas grandes teorias dos tempos modernos: a da relatividade e a dos *quanta*.

Extraordinária profecia esta do mais alto espírito que no seu tempo dominava as ciências do mundo físico!

Já vos falei, meus senhores, dos conceitos relativistas e das suas últimas consequências, na hora presente.

Vou agora ocupar-me da concepção quântica que a par da outra e mais do que a outra, veio revolucionar o pensamento científico em termos tais, que os mesmos fundamentos axiomáticos da ciência do movimento parecem periclitantes e ilusórios. Não há domínio matemático que a sua estruturação não tenha utilizado e enriquecido. Por sua intenção, alargou-se e fortaleceu-se a teoria das matrizes, em termos não sonhados por Hermite, que nela não podia adivinhar tão indispensável poder algorítmico. Na interpretação da sua doutrina, encontraram mais largos horizontes e mais sólidos modelos as últimas conquistas da teoria das equações diferenciais. A teoria da relatividade, de tão precário campo experimental no âmbito da mecânica macroscópica, teve na mecânica do átomo extensa e fecunda margem de acção, arena de incontestáveis triunfos e satisfatória confirmação dos seus processos de análise. A teoria dos grupos, à custa do conceito de *representação,* ampliou os seus domínios e encaminha-se, com notável brilho e incontestável êxito, para uma definitiva superintendência de todos os fenómenos físicos. E como não, se ela já era, há tempo, o grande sistematizador da geometria, e esta, graças à concepção unitária, uniu aos seus os destinos da física?

Mais ainda. Embora a álgebra das matrizes estivesse construída por Hilbert e Courant, desde a publicação, em 1924, da sua obra magistral sobre os *Métodos da Física Matemática,* foram, sobretudo, as modernas necessidades da teoria quântica que determinaram a consolidação dessa álgebra de transformações, por cujo intermédio o conceito de grupo define, nos seus invariantes, as leis dos fenómenos.

Assim como a experiência de Michelson-Morley afirmava a invariância da velocidade da luz, os números obtidos por Lummer e Pringsheim, ao determinar a distribuição da energia no espectro do corpo negro, contrariavam os resultados teóricos, obtidos pelos métodos de Gibbs.

Para resolver a dificuldade, propôs Planck a adopção dum critério *quântico. Um oscilador harmónico, vibrando com frequência v, só pode aumentar ou diminuir a sua energia por múltiplos inteiros do quantum elementar hn,* sendo *h* uma constante, chamada *quantum de acção* ou constante de Planck:

$$h = 6{,}626 \times 10^{-27}\ \text{erg.seg.}$$

Foram vários os domínios da física em que se revelou o êxito da hipótese de Planck, devendo citar-se, como principais, o da termodinâmica, onde teve satisfatória interpretação estatística o princípio de Nernst, e, sobretudo, o da espectroscopia, onde a perfeição experimental tinha atingido um elevado grau, e onde os dados da experiência não tinham ainda encontrado uma base teórica segura.

Foi apoiado na hipótese de Planck e nos conceitos de Rutherford que Bohr construiu o seu modelo do átomo. Todos sabem em que consiste este modelo. Vamos recordá-lo ràpidamente.

O átomo é constituído por um núcleo, com carga eléctrica positiva e electrões, com carga eléctrica negativa, a mesma para todos.

A massa do núcleo é muito grande em relação à dos electrões e a sua carga é N*e* sendo -*e* a carga de cada electrão e *N* o seu número, que define também a posição do elemento considerado na escala de Mendeleief. As acções electrostáticas entre o núcleo e os electrões são reguladas pela lei de Coulomb, desprezando-se, pela sua insignificância em face das primeiras, as acções meramente gravíticas. Posta de parte a hipótese estéril de os electrões se encontrarem colados ao núcleo, a

estabilidade deste sistema é necessàriamente *dinâmica*; os electrões gravitam em tôrno do núcleo.

Mas esse movimento, se for subordinado às leis da electrodinâmica clássica, importa *radiação*, e, por consequência, perda de energia, até que o electrão assuma movimento rectilíneo e uniforme, o que é impossível, ou esteja em repouso e, portanto, colado ao núcleo, hipótese que já rejeitámos, por não ter valor.

Por isso, Bohr admitiu, não sendo de excluir a possibilidade de radiação que explica as riscas espectrais, que essa radiação não existe para determinadas trajectórias electrónicas, chamadas estacionárias, e apenas se revela quando o electrão passa duma dessas trajectórias para outra. Se a diferença de energia correspondente às duas trajectórias é ΔW a radiação emitida tem uma frequência n definida por

1) $$\Delta W = h\nu.$$

Por consequência, na teoria de Bohr, a resolução dum problema de dinâmica atómica consiste em integrar as equações do movimento dos electrões e, em seguida, determinar as constantes de integração de maneira tal que as trajectórias respectivas sejam estacionárias.

É nesta última operação que consiste a *quantificação* do problema. As frequências possíveis são tantas quantas as passagens duma órbita estacionária para outra.

Esta teoria veio abrir novos caminhos à análise espectral. Serviu, desde logo, para calcular as riscas do hidrogénio e do hélio ionizado; e, com os trabalhos de Sommerfeld, Epstein, Schwarzschild, Landé, Heisenberg e Pauli, entre outros, permitiu resolver o problema dos multipletes e interpretar o fenómeno Zeeman, conduzindo ao estabelecimento empírico da formula de Landé, relativa à separação magnética das riscas dum multiplete. Não farei referência à definição dos números quânticos que caracterizam cada estado estacionário e que estão relacionados com os momentos angulares do núcleo e do electrão de série e com o campo magnético. A evolução da teoria quântica tem sido tão rápida e a deformação da concepção inicial tão profunda, que eu não sei se deva justificar o meu silêncio sobre esses primeiros resultados da mecânica atómica de Bohr, dizendo que eles são hoje do domínio da física geral, ou dizendo que eles já pertencem aos domínios da história. Por isso, acentuarei apenas o que há de fundamental nessa evolução.

Em 1924, Pauli enunciava o princípio de *exclusão*; e o seu aparecimento marca, talvez, o primeiro contacto da mecânica atómica com a teoria relativista. Foram, com efeito, exigências do pensamento relativista e a natureza do fenómeno de Zeeman que levaram Pauli a propor que o número quântico s fosse transferido para o electrão e a afirmar o seu conhecido princípio: *Cada electrão de série é caracterizado por quatro números quânticos (n, l, j, m) que não podem ser os mesmos para dois electrões do mesmo átomo.*

Ora, a atribuição ao electrão de série dum quarto numero quântico vinha perturbar gravemente a concepção mecanista, visto que, tratando-se dum ponto, o número dos seus graus de liberdade não podia exceder *três*.

Por isso, logo em 1925, Goldsmith e Uhlenbeck atribuíram ao electrão um movimento rotatório, cujo momento de giração é representado pelo quarto número quântico que lhe era atribuído pela concepção de Pauli. E desde então o *spinor*, ou *electrão girante*, foi uma nova conquista da teoria quântica.

Como se vê, o átomo identificava-se deste modo com um verdadeiro sistema planetário, a cujos elementos, como na mecânica celeste, era conferido um duplo movimento de translação e rotação.

Mas a concepção de Bohr trazia dentro de si o germe da sua própria ruína. Quanto mais a teoria do átomo se aproximava do modelo

laplaciano, mais se destacava o carácter artificial dessas órbitas privilegiadas que impunham, como possíveis, apenas certos valores das constantes de integração do sistema integral geral das equações do movimento. Ela dera lugar, com efeito, a numerosas regras empíricas, como as chamadas regras de selecção, onde intervêm números inteiros e semi-inteiros, mas essas regras, já na análise do espectro do hélio neutro, se tinham mostrado incompatíveis com os resultados teóricos.

Por outro lado, uma velha hipótese vinha alentar a descrença na perfeição do modelo de Bohr. *Velha*, de vinte anos apenas.

Logo depois de estabelecida a hipótese de Planck, e na impossibilidade de explicar pela teoria ondulatória o chamado *fenómeno foto-eléctrico*, ou seja a captação de electrões pela acção da luz, Einstein formulara, em 1905, a hipótese de que a energia radiante de frequência *n* era constituída por entidades insecáveis de grandeza *hn* chamadas *fotões*; e assim explicava ele que um oscilador harmónico só absorvesse energia por *quanta hn* como admitia a hipótese de Planck. Sòmente o fotão, pela sua mesma natureza de energia radiante, é caracterizado por uma frequência que lhe dá condição ondulatória. E, como a hipótese de Einstein não só explicou o efeito foto-eléctrico, mas também a pressão de radiação de Maxwell e, sobretudo, o efeito Compton (em 1923), ela foi, incontestàvelmente, o primeiro traço de união entre essas duas secularmente antagónicas teorias: a corpuscular e a ondulatória. Bem sabemos que a posterior teoria da relatividade havia de dar ao seu autor um maior e inexcedível destaque na estruturação da ciência moderna; bem sabemos também que a concepção de Einstein, aplicada aos fotões, não era ainda a afirmação da aliança *partícula material-onda associada*, afirmada por Broglie, como veremos, em 1925. Mas não é menos certo que, tendo presente a relação que a teoria da relatividade estabelece entre os conceitos de energia e matéria, e tendo presente também a utilização feita por Broglie dos métodos relativistas, a concepção de Einstein, tida como revolucionária à data do seu aparecimento, marca uma *étape* gloriosa na construção da mecânica atómica e na consagração do seu génio.

O ano de 1925 e o seguinte haviam de ser particularmente fecundos em criações doutrinárias do mais alto valor.

Estudando, com Kramers, a dispersão da luz, pelos métodos da que então era a teoria quântica, Heisenberg criava a *mecânica das matrizes*.

No mesmo ano, Broglie estabelecia o conceito de onda associada a toda a partícula material em movimento. E logo no princípio do ano seguinte, utilizando as ideias de Broglie, lançava Schrödinger, em três notáveis memórias, os fundamentos da *mecânica ondulatória*, por intermédio da qual, pouco depois, interpretava os principais resultados da teoria de Heisenberg.

Entretanto, Dirac iniciava a construção de uma verdadeira mecânica racional quântica, conseguindo conservar as equações diferenciais do movimento electrónico a forma canónica, exprimindo às condições quânticas por parêntesis de Poisson, e utilizando assim todas as vantagens de invariância que os caracterizam.

Pelos métodos da sua mecânica das matrizes já em 1925 Heisenberg, com Jordan e Born, reconstruir a teoria do oscilador harmónico e achava directamente a fórmula da dispersão; e logo no princípio de 1926, com Jordan, e utilizando o electrão girante, calculava a estrutura fina dos dobletes alcalinos, as respectivas intensidades no fenómeno Zeeman, deduzia a fórmula de Sommerfeld para o fenómeno de Paschen-Back e, pouco depois, resolvia o problema do espectro do hélio neutro.

Com o instrumento analítico que acabava de criar, Dirac demonstrava vários resultados obtidos por Heisenberg e Jordan e, utilizando os métodos relativistas, explicava o

fenómeno Compton, com um rigor não atingido pelo método dos fotões de Einstein. Mas, nem ele, nem Heisenberg utilizavam, na construção da teoria do átomo, a geminação onda-corpúsculo, que já aparece na audaciosa concepção einsteineana.

Essa ideia lançou-a, como já dissemos, nesse mesmo ano de 1925, uma memória célebre de Luís de Broglie.

E ela sugeriu, logo depois, a Schrödinger a ideia duma mecânica nova em que o fenómeno já não é um electrão móvel submetido a forças, mas uma *onda*, cuja função característica deve satisfazer a uma certa equação às derivadas parciais, em que a energia é um parâmetro. A Schrödinger nem sequer interessava dar a essa função característica das ondas uma significação física; foi Born quem depois atribuiu ao quadrado do seu módulo o significado de densidade de carga. À teoria de Schrödinger só interessava determinar os *valores próprios* do parâmetro energia, de modo tal que a equação das ondas tivesse uma solução única, contínua e limitada em todo espaço. ¿E quais são esses valores próprios? São os níveis de energia do átomo.

A aplicação da nova mecânica ondulatória conduziu imediatamente à fórmula da dispersão, anteriormente achada por Heisenberg, ao cálculo da intensidade das riscas do hidrogénio no fenómeno Stark, e à teoria das perturbações. Essa concordância dos seus resultados com a teoria anterior valorizou, desde logo, a nova mecânica, cujos processos, os da teoria das equações diferenciais, tinham ao seu dispor, o que não acontecia com os de Heisenberg, uma das mais perfeitas e ricas construções da análise matemática.

Em 1927, Davisson e Germer descobriam a difracção dos electrões. Embora de natureza corpuscular, eles produzem interferências, como se fossem radiações com um determinado comprimento de onda. E esse comprimento de onda é o previsto pela teoria de Broglie. Pouco mais tarde, em 1928, Bethe estabelecia uma teoria completa da difracção electrónica, confirmada pela experiência. E é este, talvez, o mais sólido apoio experimental da mecânica ondulatória.

No campo puramente matemático, a concepção onda-corpúsculo tem uma notável representação na teoria das características das equações diferenciais, que principalmente se deve a Hadamard e Levi-Cívita. Se um fenómeno pode ser representado por um sistema normal de equações às derivadas parciais, as características e bicaracteríscas respectivas traduzem a parte ondulatória e a parte corpuscular do fenómeno, não sendo possível deduzir-se, do simples conhecimento duma das partes do fenómeno, o sistema de equações diferenciais que o representam.

Este esquema não é apenas duma grande beleza teórica. Aplicando as equações de Dirac, que são a última generalização das de Schrödinger, mostrou recentemente Racah, à custa do conceito de variedade característica, como pode justificar-se, em certos casos, o princípio de indeterminação de Heisenberg.

Mas é, sobretudo, nessa álgebra dos estados, a que já aludi, nesse simbolismo em que o conceito de transformação e o de grupo dominam todo o raciocínio abstracto, que se encontra, certamente, o primacial instrumento de análise da física moderna.

E, se o dualismo onda-corpúsculo traduz, afinal, como mostrou Heisenberg, no campo estritamente matemático, uma simples dualidade de representações equivalentes dos fenómenos atómicos, não admira que a teoria física hesite na interpretação desse dualismo. Para uns, a realidade é o corpúsculo e a onda uma abstracção, representativa duma probabilidade. Para outros, como Bohr, ambos os conceitos são abstractos. Mas o que não pode recusar-se, como lei física, são os invariantes dos grupos de transformações das grandezas observáveis. E daí provém o incontestado domínio da teoria dos grupos como algoritmo fundamental da teoria física.

ESTRUCTURA DA LUZ – HIPÓTESE DOS QUANTA MÉTODO DE ESTATÍSTICA[1]

ANTÓNIO DA SILVEIRA
Professor de Física Geral e Experimental do I.S.T
Publicado na Técnica n.º 91 de Março de 1938

INTRODUÇÃO

1) Sabem que as modificações profundas introduzidas nas nossas concepções mais habituais pela Teoria da Relatividade correspondem à última fase de conflito secular entre a teoria das acções a distância e a teoria das acções de contacto. A teoria das acções de contacto tal como foi desenvolvida por Maxwell e como eu expuz aqui o ano passado repousa sôbre esta ideia: *extensão progressiva das equações locais, válidas no domínio infinitamente pequeno, e estabelecidas no caso do repouso, primeiro aos movimentos estacionários e quasi estacionários, e depois aos estados ràpidamente variáveis.* Esta extensão legitimava-se, como sempre, pelo acôrdo das suas consequências com os factos.

A teoria de Maxwell foi em seguida depurada pelos trabalhos de Hertz e tomou com êste grande físico um aspecto abstracto muito semelhante ao que caracteriza as teorias da Física moderna; para os corpos em repouso, isótropos, sem magnetismo permanente e não ferromagnéticos, sintetiza-se neste sistema de quatro equações diferenciais:

$$\begin{aligned} rot\,\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ rot\,\vec{H} &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}\right), \\ div\,\vec{D} &= \rho, \\ div\,\vec{B} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

a que é preciso juntar as três equações de definição

$$\vec{D} = \chi \vec{E}, \qquad \vec{B} = \mu \vec{H}, \qquad \vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{2}$$

---

[1] É o título do curso que eu fiz este ano no Instituto Superior Técnico de 24 de Janeiro a 22 de Fevereiro, e esta publicação reproduz fielmente, de parte pequenos acrescentos, o que eu disse.
Está previsto para o próximo ano um outro curso sôbre as Estatísticas Quânticas e suas Aplicações que virá completar o deste ano.
Agradeço em primeiro lugar ao meu colega e amigo dr. Bento Caraça o favor das suas críticas, que tive em conta na correcção das provas, e agradeço em segundo lugar ao meu antigo aluno e amigo Ruy Cambournac a sua colaboração na preparação do original.
As obras que consultei e onde os tomas por vezes foram literais encontram-se reunidas no fim da publicação.

HONICA n.º 4 DEZ 95

e a expressão da densidade de energia

$$u = \frac{1}{2}\left(\vec{D}|\vec{E} + \vec{B}|\vec{H}\right) \quad [2] \qquad (3)$$

$\vec{E}$ designa o campo eléctrico, $\vec{H}$ o campo magnético, $\vec{D}$ o deslocamento eléctrico, $\vec{B}$ a indução magnética, $\vec{J}$ a densidade de corrente, ρ a densidade de carga, χ a constante dieléctrica, μ a permeabilidade magnética e σ a conductividade.

Estas equações contém a essência dum grande número de factos experimentais do domínio do electromagnetismo e da óptica propriamente dita. Mas a teoria de Maxwell-Hertz não conseguiu explicar satisfatoriamente as reacções entre a matéria e o radiamento, descrever por exemplo a emissão e absorpção do radiamento pelos corpos materiais, o fenómeno da dispersão, etc.

Para conseguir isto era preciso fazer uma ideia da estructura eléctrica da matéria e da maneira como esta estructura reage sôbre o radiamento electromagnético. Logo que os resultados experimentais do século XIX o permitiram Lorentz constituiu a sua teoria dos electrões que veio até certo ponto resolver as dificuldades.

A ideia que presidiu à estructuração da teoria de Lorentz foi esta: *as equações de Maxwell-Hertz convenientemente modificadas devem-se aplicar ao electrão.*

Resumamos os postulados da teoria.

1.º) A electricidade é constituída por electrões. O éter enche todo o espaço e é a séde dos fenómenos electromagnéticos. Os electrões movem-se mas o éter é imóvel.

2.º) Não existe outra corrente além da corrente de deslocamento no éter e a corrente de convecção dos electrões.

3.º) Não há magnetismo. A indução magnética identifica-se com o campo magnético do éter.

Estas hipóteses conduzem às equações do campo de Lorentz:

$$\begin{aligned} rot\,\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ rot\,\vec{H} &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \rho\vec{v}\right), \\ div\,\vec{E} &= \rho, \\ div\,\vec{H} &= 0 \\ u &= \frac{1}{2}\left(E^2 + H^2\right). \end{aligned} \qquad (4)$$

Segundo Lorentz estas equações deviam ser consideradas válidas mesmo nos domínios em que a definição experimental dos vectores E e H é impossível; por exemplo Lorentz considerava-as exactas tanto num ponto do interior do electrão como num ponto adjacente da sua superfície.

ρ designa aqui a densidade, finita, da electricidade num ponto do interior do electrão e $\vec{v}$ a velocidade da electricidade no ponto em que a densidade microscópia é ρ.

---

[2] As unidades adoptadas neste curso são as do sistema racional de Lorentz.

Esta extensão excedeu em audácia tôdas as que até aí tinham sido feitas; não obstante os sucessos alcançados foram de tal ordem que durante muito tempo a teoria de Lorentz foi considerada como a expressão exacta da realidade.

Se procurarmos transformar as equações (4) rigorosamente verdadeiras para todo o ponto do espaço num sistema de equações locais válidas em todo o domínio infinitamente pequeno, por meio dum cálculo de médias apropriado, devemos ser conduzidos às equações macroscópicas da teoria de Maxwell; somos efectivamente e esta coincidência era necessária a fim de que a teoria de Lorentz fôsse aceitável.

Àquelas cinco equações é preciso juntar ainda, por necessidades futuras, a expressão da densidade de fôrça ponderomotriz:

$$\vec{f} = \rho\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v} \wedge \vec{H}\right), \tag{5}$$

onde a presença de ρ em factor mostra bem que o éter não sofria a acção de nenhuma fôrça.

Esta equação figura geralmente entre os postulados da teoria de Lorentz; mas pode ser obtida utilizando as equações de transformação da fôrça, na dinâmica da relatividade [3], e por tanto não precisa de ser considerada como um postulado à parte. De resto ela deve conduzir de par com as equações do campo (4) ao princípio da conservação da energia.

No éter, onde $\rho = 0$, e só interessa êste caso para o estudo do equilíbrio do radiamento, as equações do campo (4) transformam-se facilmente e tomam a forma

$$\begin{aligned} lap\,\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= lor\,\vec{E} = 0, \\ lap\,\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= lor\,\vec{H} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

que são as bem conhecidas equações de onda de propagação das perturbações electromagnéticas no éter com a velocidade *c*,

2) É natural que se tenha posto aos meus ouvintes a seguinte questão: ¿que razão tinha Lorentz para continuar a falar do éter e a considerar a sua existência?!...

A razão vem de que as equações do campo electromagnético não satisfazem ao princípio de relatividade da Mecânica newtoniana, quere dizer, que se são válidas num certo sistema de referência deixam de o ser num outro sistema animado em relação ao primeiro dum movimento de translacção rectilíneo e uniforme — pelo menos se admite que para passar do primeiro sistema ao segundo se devem utilizar as fórmulas de transformação de Galileu.

No caso mais simples de dois sistemas (Ox, y, z) e (O'x', y', z') semelhantemente orientados em movimento relativo uniforme de velocidade *v* na direcção do eixo dos *x*, estas fórmulas são como sabem

$$\begin{aligned} x' &= x - vt & & & x &= x' + vt \\ y' &= y & & \text{ou} & y &= y' \\ z' &= z & & & z &= z' \\ t' &= t & & & t &= t' \end{aligned} \tag{7}$$

[3] Tolman — Phil. Mag. 21-296 (1911).

se O e O' coincidem na origem dos tempos.

Estas fórmulas definem uma transformação que depende dum único parâmetro v e tôdas as transformações dêste género formam um grupo, nêste sentido que duas transformações sucessivas de velocidades v e v' equivalem a uma transformação única da mesma forma de velocidade

$$v'' = v + v'.$$

Tudo se passava então como se existisse no Universo um certo meio de referência tal que as equações do electromagnetismo seriam válidas em todos os sistemas de eixos ligados a êste meio e somente nêles. Pois era a êste meio de referência que Lorentz dava o nome de *éter.*

Mas mesmo assim, reduzido ao simples papel de referencial cinemático, o conceito do éter, mostrou-se inútil. Com efeito, os fenómenos ópticos e electromagnéticos observados deveriam segundo a teoria de Maxwell-Lorentz ser influenciados pelo movimento do observador em relação ao éter e um físico deveria, fazendo observações sôbre a propagação da luz, poder deduzir a sua velocidade em relação ao éter.

Ora, o físico que experimenta no seu laboratório é sempre arrastado com uma grande velocidade pelo movimento da Terra em tôrno do Sol, e a sua velocidade muda completamente de direcção duma época para outra do ano. Portanto se por um acaso inverosimil se achasse numa certa época do ano em repouso em relação ao éter, alguns mêses mais tarde achar-se-ia em movimento muito rápido em relação a êle. Por experiências feitas no decorrer do ano deveria pois ser-lhe possível pôr em evidência o seu movimento em relação ao éter. Simplesmente tôdas as experiências, de resto extremamente precisas, feitas no domínio da óptica e do electromagnetismo por Michelson-Morley, Trouton-Noble, etc. deram um resultado negativo!...

Numerosas foram então as tentativas feitas para conciliar os resultados negativos destas experiências com as teorias existêntes. Isso não foi possível.

E foi Einstein, como sabem, que aos 25 anos achou a verdadeira solução do problema, mostrando de resto que o resultado negativo era perfeitamente natural.

A razão profunda pela qual a teoria electromagnética de Maxwell-Lorentz parecia implicar a possibilidade de se poder pôr em evidência, por medidas ópticas ou electromagnéticas, o movimento de translacção uniforme dum observador em relação ao *éter,* é porque se admitia "a priori" que na passagem dum sistema de coordenadas para outro animado em relação ao primeiro dum movimento de translacção rectilínio e uniforme, as coordenadas dos dois sistemas deviam estar ligadas pelas fórmulas de transformação do grupo de Galileu.

O facto é que as equações de campo de Lorentz não são invariantes numa transformação de Galileu e daqui resultava a possibilidade prevista, mas não confirmada pelos factos, de se poder pôr em evidência o movimento da terra em relação ao éter. Mas o estudo matemático das equações do campo electromagnético mostrou a Lorentz que se as suas equações não são invariantes numa transformação de Galileu, são-no pelo contrário numa outra transformação de coordenadas também linear, mas um pouco mais complicada, que se chama hoje transformação de Lorentz.

Sempre no caso simples de dois sistemas semelhantemente orientados coincidentes na origem dos tempos e em movimento relativo uniforme de velocidade v na direcção do eixo dos x as fórmulas de transformação de Lorentz são:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y \qquad y = y'$$

$$z' = z \qquad z = z' \tag{8}$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{ou} \quad t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Estas transformações formam ainda um grupo pois duas transformações sucessivas de velocidades v e v' equivalem a uma transformação única da mesma forma de velocidade

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}. \tag{9}$$

A transformação de Galileu (7) é de resto a forma limite da de Lorentz quando se supõe nesta última que a velocidade c devém infinita. A velocidade c da luz no vácuo representa pois nesta nova cinemática o mesmo papel que a velocidade infinita na cinemática ordinária.

As fórmulas de transformação do grupo de Lorentz possuem ainda a propriedade de manter invariante a expressão

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2. \tag{10}$$

Êste invariante representa na teoria da relatividade um papel análogo ao da distância entre dois pontos da Geometria.

Podemos considerar como característica das fórmulas de transformação do grupo de Lorentz o facto de conservarem invariantes as equações de propagação das ondas e o intervalo de universo de dois acontecimentos. Como as equações de onda são invariantes numa transformação de Lorentz, os fenómenos ópticos e electromagnéticos são rigorosamente os mesmos para dois observadores em movimento relativo uniforme; donde resulta que é impossível um dêstes fenómenos permitir a um observador pôr em evidência o seu movimento absoluto em relação ao suposto éter.

O resultado negativo das experiências de Michelson-Morley, Trouton-Noble, etc., é então perfeitamente natural.

Inversamente, se se postula como um princípio a relatividade de todos os fenómenos ópticos e electromagnéticos, no mesmo sentido em que a Mecânica newtoniana postulava a relatividade dos fenómenos mecânicos, é necessário admitir que é a transformação do grupo de Lorentz e não a do grupo de Galileu que exprime correctamente as relações entre as coordenadas de dois observadores em movimento relativo uniforme.

3) A teoria de Maxwell-Lorentz atribui à luz uma estructura electromagnética que é impossível alienar: a passagem duma onda electromagnética monocromática por um ponto do espaço corresponde à passagem por êsse ponto dum campo eléctrico e dum campo magnético oscilantes, em fase, situados no plano tangente à onda, perpendiculares entre si e representando energias iguais por unidade de volume.

Sem falar mesmo da teoria quântica do campo electromagnético de Born e Infeld, a mais recente, que ainda um dia possivelmente aqui será exposta, a

teoria de Maxwell-Lorentz constituía há trinta anos, e constitui ainda hoje, a síntese mais completa dos factos relativos à luz.

Mas de então para cá descobriram-se fenómenos que revelaram para a luz uma estructura muito diferente da duma onda electromagnética.

O primeiro dêsses fenómenos, apresentado aqui o ano passado pelo dr. Valadares, foi o efeito foto-eléctrico, cuja característica essencial era esta: uma radiação de frequência ν parecia só poder ceder a sua energia à matéria por quantidades finitas de grandeza proporcional à frequência.

Mais uma vez o subversivo Einstein, numa intuïção tão genial como a que o conduziu a enunciar o princípio da relatividade, viu nêste facto experimental a necessidade de voltar, numa certa medida, a uma concepção corpuscular newtoniana da luz, e admitir que um radiamento de frequência n se acha dividido em grãos de energia

$$E = h\nu, \tag{11}$$

h sendo uma constante universal.

Esta hipótese forneceu-lhe imediatamente a lei experimental do efeito foto-eléctrico que liga a energia cinética dos electrões expulsos e a frequência da radiação excitadora.

Mas apesar dos sucessos da teoria dos "licht-quanten" ou dos fotões, como se diz hoje, não nos é possível conservar à luz uma estructura puramente corpuscular: a obra de Fresnel-Maxwell não no-lo permite.

Os físicos viram-se então sèriamente embaraçados, porque dum lado, há o conjunto de fenómenos de interferência e difracção que mostram ser a luz formada de ondas, e, por outro lado, há um conjunto doutros fenómenos mais recentemente descobertos que mostram ser a luz formada de corpúsculos.

Sabem que a única maneira de sair da dificuldade consistiu em admitir que o aspecto ondulatório da luz e o seu aspecto corpuscular são dois aspectos complementares duma mesma realidade.

Tal é a síntese que no caso mais geral a mecânica ondulatória de Broglie nos há-de precisar talvez um dia.

Pois com o objectivo, justamente, de preparar um futuro curso sôbre a Mecânica Ondulatória eu vou procurar nestas lições sublinhar a necessidade que se nos impõe de conservar ao radiamento simultâneamente um carácter ondulatório contínuo e um carácter corpuscular discontínuo. Essa necessidade vem-nos por um lado como disse da interpretação dos fenómenos de interferência, difracção, etc. que exigem a continuïdade, ou pelo menos um certo compromisso, uma certa solidariedade, entre os diferentes pontos duma onda, e, por outro lado, não só dos fenómenos foto-eléctrico, de Compton e de Raman, mas ainda e sobretudo do fenómeno das fluctuações do radiamento de que nos ocuparemos na devida altura.

I PARTE

Leis de Stefan — Boltzmann e de Wien

Vou relembrar num certo à vontade, sem me preocupar com questões muito elementares, as leis do radiamento negro.

Todos os corpos, como sabem, devém incandescentes a uma temperatura suficientemente elevada e emitem radiações. Esta propriedade de emitir radiações não é naturalmente exclusiva dos corpos muito quentes; um corpo à temperatura ordinária emite também energia radiante em quantidade con-

siderável, se bem que notavelmente inferior à energia por êle próprio emitida a uma temperatura muito elevada.

Esta emissão de energia não dá de resto origem a um resfriamento do corpo que se acha à temperatura ambiente, porque ela é compensada pela energia radiante emitida pelos corpos adjacentes e por êle próprio absorvida.

Concebamos então um recinto mantido a uma temperatura uniforme *T*; os corpos materiais contidos nêste recinto emitem e absorvem radiamento e, nêste jôgo, acaba naturalmente por se estabelecer um estado de equilíbrio no qual as trocas de energia entre a matéria e o radiamento se compensam. Kirchoff demonstrou, baseando-se sôbre os princípios fundamentais da termodinâmica, como viram o ano passado no curso do dr. A. Ferreira, que êste estado de equilíbrio é único e corresponde a uma distribuição espectral perfeitamente determinada do radiamento contido no recinto. Mais, a distribuïção de energia dêste radiamento pelas diferentes regiões do espectro é independente das dimensões ou da forma do recinto, é independente das propriedades particulares dos corpos materiais que êle contém ou que constituem as suas parêdes, e depende unicamente da temperatura *T* do recinto.

A êste radiamento característico da temperatura considerada dá-se correntemente o nome de *radiamento negro* relativo a esta temperatura. Em face dêstes factos poz-se então à Física teórica o problema de saber prever a composição espectral do radiamento negro a uma dada temperatura.

Designando por *u* a densidade total da energia do radiamento contido no recinto, e por u_ν a densidade de energia relativa ao intervalo n e $\nu+d\nu$, *tanto na hipótese contínua como na hipótese discontínua*, teremos

$$u=\int_0^\infty u_\nu d\nu. \tag{12}$$

Admitamos ainda que a distribuïção do radiamento é *isótropa:* na hipótese contínua isto quere dizer que a energia que atravessa num segundo e numa direcção determinada um elemento de superfície *dS*, normal a esta direcção, é independente desta direcção; ou, na concepção de Einstein, o número de "licht-quanten", de fotões, que atravessam por segundo o elemento *dS* é independente da direcção da normal a êste elemento.

A primeira lei que caracteriza a destribuïção da energia é a lei de *Stefan-Boltzman:*

$$u=aT^4, \tag{13}$$

a densidade u *da energia é proporcional à quarta potência da temperatura absoluta.*

A segunda lei, lei de Wien, diz que a *densidade espectral do radiamento, para uma certa frequência é proporcional ao produto do cubo da frequência por uma função do cociente da frequência pela temperatura:*

$$u_\nu = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right). \tag{14}$$

A lei de Wien é mais geral do que a lei de Boltzman; com efeito

$$u=\int_0^\infty \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right)d\nu = T^4\int_0^\infty F\left(\frac{\nu}{T}\right)d\left(\frac{\nu}{T}\right),$$

e, fazendo $z=\frac{\nu}{T}$:

$$u=T^4\int_0^\infty F(z)\,dz,$$

donde

TÉCNICA, 0 - 4 DEZ. 95

ou $u = aT^4$ com $a = \int_0^\infty F(z)\, dz$.

Estas duas leis são formas degeneradas da lei de Planck.

Relação entre a energia e a impulsão

A demonstração da lei de Boltzman está ligada à existência da *pressão de radiação*, que foi prevista teòricamente por Maxwell e Boltzmann, e estabelecida experimentalmente pelos trabalhos de Lebedew, Nichols e Hull no caso da incidência normal, e por Poynting [4] no caso da incidência oblíqua.

Êste fenómeno da pressão de radiação traduz simplesmente o facto que o radiamento que se propaga numa direcção determinada transporta não só energia, mas também quantidade de movimento. A uma energia *U* do radiamento acha-se associada uma quantidade de movimento

$$G = \frac{U}{c}. \tag{15}$$

Êste fenómeno da pressão de radiação é o primeiro que nos aparece êste ano e que se deixa interpretar igualmente bem na concepção ondulatória contínua e na concepção corpuscular discontínua do radiamento.

Na terminologia de Luiz de Broglie é um fenómeno *neutro*.

Mas, para estabelecermos a lei de Stefan-Boltzman, em vez de considerarmos aquela relação como puramente experimental, vamos mostrar as suas ligações primeiro com a teoria electromagnética e depois com a teoria dos quanta.

Ponto de vista da teoria electromagnética

a) *Conservação da energia*

Consideremos um volume t do campo electromagnético limitado por uma superfície s. Seja $\rho d\tau$ a carga contida no elemento de volume dt animada duma velocidade V; esta carga acha-se submetida a uma fôrça ponderomotriz

$$\rho\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V} \wedge \vec{H}\right) d\tau, \tag{16}$$

que produz por unidade de tempo o trabalho

$$\rho \vec{E} | \vec{V}\, d\tau.$$

por ser a segunda fôrça constantemente normal à velocidade.
Para o volume total t temos pois uma potência

$$\frac{dW}{dt} = \int \rho \vec{V} | \vec{E}\, d\tau.$$

Substituindo $\rho\vec{V}$ pelo seu valor tirado da equação do campo (4) vem

$$\frac{dW}{dt} = \int c\, rot\, \vec{H} | \vec{E}\, d\tau - \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} | \vec{E}\, d\tau; \tag{17}$$

---

[4] Phil. Mag. Vol. IX, p. 169, 1905.

mas apoiando-nos sôbre a expressão da divergência dum produto externo e sôbre o teorema do fluxo temos

$$\int\left(\vec{E}\wedge\vec{H}\right)|\vec{n}\,d\sigma=\int\left(\vec{H}|rot\,\vec{E}-\vec{E}|rot\,\vec{H}\right)d\tau,$$

de sorte que a equação (17) pode escrever-se

$$\frac{dW}{dt}=-\frac{1}{2}\int\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2+H^2\right)d\tau-c\int\left(\vec{E}\wedge\vec{H}\right)|\vec{n}\,d\sigma. \qquad (18)$$

Esta relação exprime simplesmente a conservação da energia: o trabalho das fôrças electromagnéticas no volume t, aumentado do fluxo de energia que atravessa a superfície s, é igual à diminuïção da energia electromagnética do campo.

O vector

$$\vec{P}=c\left(\vec{E}\wedge\vec{H}\right), \qquad (19)$$

cujo fluxo através de s representa a potência radiada é o *vector radiante de Poynting.*

b) *Tensões de Maxwell. Impulsão electromagnética.*

Apoiando-nos mais uma vez sôbre as equações do campo podemos dar uma forma interessante à *densidade de fôrça ponderomotriz* (16).

Substituindo r e $\rho\vec{V}$ pelas suas expressões tiradas de (4) podemos escrever

$$\vec{f}=\vec{E}\,div\,\vec{E}+rot\,\vec{H}\wedge\vec{H}+rot\,\vec{E}\wedge\vec{E}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\wedge\vec{H}\right).$$

Os três primeiros termos, aos quais podemos somar a quantidade $\vec{H}\,div\,\vec{H}$ que é nula por $div\,\vec{H}$ ser nula, correspondem às tensões de Maxwell; o quarto termo foi introduzido por Lorentz e àparte o factor $-\frac{1}{c}$ é a derivada em ordem ao tempo do vector de Poynting.

Consideremos para maior simplicidade apenas as componentes *x* dos vectores; obtemos sem dificuldade.

$$f_x=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(E_x^2-E_y^2-E_z^2+H_x^2-H_y^2-H_z^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(E_xE_y+H_xH_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(E_xE_z+H_xH_z\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial P_x}{\partial t}$$

Pondo como o ano passado para as tensões de Maxwell

$$p_{ii}=-\frac{1}{2}\left(E_i^2-E_j^2-E_k^2+H_i^2-H_j^2-H_k^2\right)$$

e

$$p_{ij}=-\left(E_iE_j+H_iH_j\right), \qquad (19)$$

substituindo e integrando para todo o volume, obtemos

$$\int f_x\,dt+\frac{1}{c^2}\int\frac{\partial P_x}{\partial t}d\tau=-\iiint\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$

Suponhamos o volume t suficientemente grande para que a superfície s que o limita não seja atingida por nenhuma perturbação electromagnética no

decorrer do tempo em que se produz o fenómeno. As tensões de Maxwell são nulas e fica simplesmente

$$\vec{F}_{mec} = \int \vec{f}\, d\tau = -\frac{1}{c^2}\int \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} d\tau, \tag{21}$$

os integrais sendo estendidos a todo o espaço.

Foi a analogia desta equação com a equação fundamental da dinâmica

$$\vec{F}_{mec} = \frac{\partial \vec{G}_{mec}}{\partial t} = \int \frac{\partial \vec{g}_{mec}}{\partial t} d\tau \quad ^{5} \tag{22}$$

que conduziu M. Abraham a considerar uma *impulsão electromagnética*

$$\vec{G}_{em} = \frac{1}{c^2}\int \vec{P}\, \partial \tau, \tag{23}$$

e uma *densidade de impulsão electromagnética*

$$\vec{g}_{em} = \frac{1}{c^2}\vec{P}. \tag{24}$$

A fôrca ponderomotriz exercida por um campo electromagnético sôbre um sistema de corpos é portanto igual à derivada em ordem ao tempo, com o sinal —, do momento electromagnético:

$$\vec{F}_{em} = -\frac{\partial \vec{G}_{em}}{\partial t}. \tag{25}$$

A equação (21) escreve-se então

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{G}_{mec} + \vec{G}_{em}\right) = 0$$

ou

$$\vec{G}_{mec} + \vec{G}_{em} = C^{te}. \tag{26}$$

a *soma das impulsões mecânica e electromagnética, dum sistema isolado, é constante.*

c) *Energia e impulsão electromagnética duma onda plana. Pressão de radiação.*

Consideremos uma onda plana, monocromática, polarizada, de frequência ν, que se propaga ao longo do eixo dos *x* positivos. Esta onda é caracterizada por um campo eléctrico E e um campo magnético H oscilantes, situados no plano da onda, em fase, perpendiculares entre si e representando energias por unidade de volume:

$$E = E_0 \cos 2\pi\, \nu\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

e

$$H = H_0 \cos 2\pi\, \nu\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

---

[5] É indiferente usar os símbolos *d* ou ∂ se as cargas não saiem do domínio da integração.

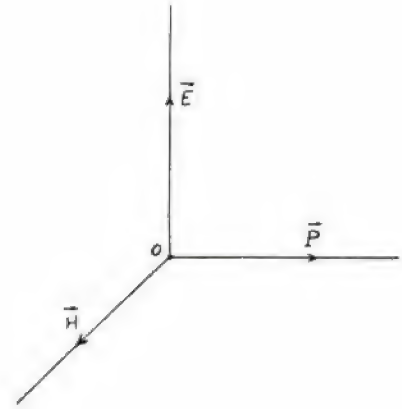


Fig. 1

A densidade instantânea de energia é

$$\frac{1}{2}\left(E^2+H^2\right)=E^2,$$

e a *densidade média* durante um período

$$\frac{E_0^2}{2}=u.$$

A energia total contida num cilindro de base unidade e de altura *c* será

$$u=\frac{cE_0^2}{2}.$$

O vector radiante é normal à onda e dirigido no sentido dos *x* positivos:

$$P=cE_0^2\cos^2 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{c}\right),$$

e o seu valor médio num período

$$P=\frac{cE_0^2}{2}.$$

Verificamos assim que o fluxo de $\vec{P}$ através da base do cilindro, quere dizer, a potência radiada, é numericamente igual à energia contida num cilindro cuja altura *c* é percorrida pela onda na unidade de tempo.

A densidade da impulsão electromagnética é

$$\frac{1}{c}E_0^2\cos^2 2\pi\nu\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

e o seu valor médio

$$g=\frac{E_0^2}{2c}=\frac{u}{c}.$$

Se agora calcularmos a impulsão electromagnética contida num cilindro de base unidade e de altura *c*, obtemos

$$G_{rim}=E_0^2=\frac{U}{c}, \tag{27}$$

isto é *a impulsão electromagnética radiada num segundo por uma onda plana é numèricamente igual à energia electromagnética média existente num centímetro cúbico:*

$$G_{elm} = u. \tag{28}$$

Se a onda incide sôbre uma placa negra em repouso, paralela ao plano de onda, a energia electromagnética transforma-se integralmente em energia de agitação molecular (calôr), e aplicando o princípio da conservação da impulsão total, que atesta ser a impulsão mecânica de translacção G_{mec} comunicada à placa num segundo igual à impulsão electromagnética G_{elm} que sôbre ela chega por segundo, teremos

$$G_{mec} = u. \tag{29}$$

A placa vai ser então repelida pela onda; mas esta impulsão G, por unidade de tempo, que se exerce sôbre uma superfície unidade, é a fôrça à qual se acha submetido cada centímetro quadrado de placa, quere dizer é a *pressão de radiação.*

Assim se obtém o resultado enunciado por Maxwell: *a pressão de radiação é igual à densidade de energia electromagnética no vácuo, onde se acha a placa.*

Claro que no caso duma superfície perfeitamente reflectora a pressão de radiação deve ser

$$p = 2u.$$

Os casos de incidência oblíqua ou de absorpção incompleta, com ou sem reflexão, não apresentam dificuldades. Em particular para uma superfície perfeitamente reflectora e uma incidência q qualquer, a pressão de radiação tem por valor

$$p = 2u\cos^2\theta$$

Êstes resultados valem ùnicamente para o vácuo. Para uma onda propagando-se num meio material obtém-se expressões bastante complicadas.

Ponto de vista da teoria de Einstein

Se passarmos à teoria discontínua em que o radiamento é constituído por corpúsculos, por gôtas de energia que se deslocam com a velocidade da luz, obteremos ainda a mesma relação entre a energia e a quantidade de movimento, mas com uma condição, com a condição de nos colocarmos no ponto de vista relativístico.

Na Mecânica newtoniana tendo em conta apenas a energia cinética, temos para uma partícula de massa *m* animada da velocidade *v*

$$E = \frac{1}{2}mv^2, \quad \text{donde}$$

$$G = mv = \frac{2E}{v},$$

e portanto para os quanta de luz, por analogia, teríamos

$$G = \frac{2E}{c} \quad \text{e não} \quad G = \frac{E}{c}.$$

Sabemos porém que a Mecânica newtoniana já não serve quando a velocidade das partículas devém comparável à velocidade da luz; é pois no ponto de vista da dinâmica relativística que nos devemos colocar.

a) *Massa duma partícula em movimento.*

Neste rápido estudo da dinâmica das partículas vamos tomar como postulados de base os dois princípios da conservação da massa e da impulsão que foram estabelecidos empiricamente duma maneira bastante sólida para poderem ser tomados como postulados da Teoria da Relatividade.

De acôrdo com êstes dois princípios, a massa total e a impulsão total dum sistema de partículas interactuantes são constantes:

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} = const. \qquad e$$
$$\sum_{\alpha} m_{\alpha}\vec{v}_{\alpha} = const. \tag{30}$$

E, de acôrdo com os princípios da relatividade restricta estas equações são válidas em todos os sistemas de coordenadas em movimento relativo uniforme.

O sistema da Mecânica clássica já incluía os princípios da relatividade do movimento, da conservação da massa e da impulsão. Mas entre a Mecânica newtoniana e a Mecânica relativística existe uma diferença essencial; essa diferença reside no facto que as equações de transformação não pertencem ao mesmo grupo.

Na Mecânica newtoniana devemos usar as equações de transformação do grupo de Galileu e então verificamos que é possível satisfazer às equações (30) em todos os sistemas de cordenadas na hipótese que a massa duma partícula seja independente da sua velocidade. Na Mecânica relativística, pelo contrário, devemos usar as equações de transformação do grupo de Lorentz, e então verificamos que só é possível satisfazer aquelas equações na hipótese que a massa duma partícula dependa da sua velocidade.

Para mostrar isto vamos estudar o caso simples dum choque longitudinal entre duas partículas elásticas idênticas (1) e (2) de forma esférica e com massas iguais m_0 em repouso.

Consideremos um primeiro sistema de coordenadas S' no qual as duas partículas se movem antes do choque com velocidade $+v'$ e $-v'$ sôbre o eixo dos x.

Fig. 2

Como por hipótese as duas partículas são perfeitamente idênticas e elásticas, é evidente que elas são primeiro levadas gradualmente ao repouso; em seguida ressaltam sob a acção das fôrças elásticas desenvolvidas, e seguem as mesmas trajectórias, com velocidades respectivamente $-v'$ e $+v'$ da mesma grandeza mas de sentido oposto.

Nêste sistema S' de coordenadas o choque satisfaz evidentemente às leis de conservação da massa e da quantidade de movimento.

Consideremos agora um segundo sistema de coordenadas S movendo-se relativamente ao primeiro na direcção do eixo dos x com uma velocidade -V.

TÉCNICA, n.º 4 DEZ. 95

Nêste novo sistema de coordenadas designemos por v_1 e v_2 as velocidades das duas partículas antes do choque, e admitindo já a possibilidade da sua massa depender da velocidade designemos por m_1 e m_2 as massas das duas partículas antes do choque.

Seja ainda M a soma das massas das duas partículas no instante do choque em que elas se acham em repouso relativo, no instante portanto em que ambas se movem com a velocidade +V em relação ao sistema S.

Se os princípios de conservação são válidos no novo sistema S, como pretende o princípio da relatividade, a massa total e a quantidade de movimento total das duas partículas devem ter o mesmo valor antes do choque e no instante de repouso relativo, e então podemos escrever

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 &= M, \quad e \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 &= MV. \end{aligned} \tag{31}$$

Usando as equações de transformação da velocidade podemos exprimir v_1 e v_2 em função dos seus valores $+v'$ e $-v'$ no sistema inicial S' e obtemos

$$v_1 = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}} \quad e \quad v_2 = \frac{-v' + V}{1 - \frac{v'V}{c^2}}. \tag{32}$$

Combinando (32) com (31), obtemos para a relação entre as massas

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + \frac{v'V}{c^2}}{1 - \frac{v'V}{c^2}}$$

que por transformações algébricas simples se pode pôr sob a forma

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Êste resultado mostra que as massas das duas partículas, que por hipótese têm o mesmo valor quando em repouso, devêm inversamente proporcionais a $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ quando se movem com a velocidade *v*, de sorte que podemos escrever

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{33}$$

É a relação que pretendíamos estabelecer.

No caso dum choque transverso obtém-se a mesma expressão.[6]

É interessante notar que esta nossa discussão mostra já que devemos atribuir uma massa à energia potencial da deformação elástica.

Com efeito das equações precedentes tiramos

$$M > \frac{2m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \tag{34}$$

[6] Tolman — Phil. Mag. 23, 1912, p. 375.

o que mostra ser a massa total das duas partículas, no instante do choque em que elas se acham em repouso relativo, maior do que a massa que seria calculada em função da velocidade V e da soma das suas massas em repouso $2m_0$ antes da deformação.

b) *Trabalho e energia cinética.*

Como a massa duma partícula varia com a velocidade, já não podemos definir a fôrça simultâneamente e indiferentemente pelas relações

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad e$$

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}),$$

como na Mecânica newtoniana. Há vantagem em adoptar a última definição, pois o princípio da igualdade da acção e da reacção das fôrças devém idêntico ao princípio da conservação da impulsão, que tomámos como axioma.

Temos então para a fôrça

$$F = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right). \tag{35}$$

Como na Mecânica newtoniana, definimos o trabalho elementar efectuado por uma fôrça $\vec{F}$ constantemente aplicada a uma partícula de posição P, pela equação

$$dW = \vec{F} \mid d\vec{P}.$$

O trabalho assim definido é a primeira forma de energia, e se a partícula é livre podemos fàcilmente do trabalho calcular a sua variação de energia cinética em função da variação de velocidade; temos

$$dE = m\frac{d\vec{v}}{dt} \mid d\vec{P} + \frac{dm}{dt}\vec{v} \mid d\vec{P},$$

ou

$$dE = mv\,dv + v^2 dm, \tag{36}$$

e substituindo *m* pela sua expressão em função da velocidade

$$dE = \frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}dv + \frac{m_0\frac{v^3}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}dv,$$

ou

$$dE = \frac{m_0 v\,dv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}. \tag{37}$$

Integrando (37) entre O e *v* obtemos a energia cinética total duma partícula de massa em repouso m_0 e que se move com a velocidade *v*:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} - m_0 c^2, \tag{38}$$

que se reduz, no caso de pequenas velocidades comparadas com a velocidade da luz, como era de esperar, à expressão newtoniana

$$E = \frac{1}{2} m_0 v^2 .$$

c) *Relações entre a massa, a energia e a impulsão*

As expressões de dE e de E podem escrever-se

$$dE = c^2 dm$$

e

$$E = c^2 (m - m_0). \tag{39}$$

Tal é a notável relação de proporcionalidade entre a massa e a energia cinética a que nos conduzem os princípios da Relatividade.

Esta proporcionalidade entre a energia cinética e o acréscimo de massa, de par com os princípios gerais de conservação da massa e da energia, sugere imediatamente que a tôda a quantidade de energia, qualquer que seja a sua forma, deve corresponder uma certa massa associada. Vimos de resto (34) que devíamos associar uma massa à energia potencial gerada durante um choque elástico.

Os físicos foram assim conduzidos a postular duma maneira geral que *a tôda a quantidade de energia* E *se acha associada uma massa* m *de grandeza*

$$m = \frac{E}{c^2}, \tag{40}$$

e que *a tôda a massa* m *se acha associada uma energia* E *pela relação inversa*

$$E = mc^2 . \tag{41}$$

Finalmente e em consequência desta associação da massa e da energia, temos para tôda a quantidade de energia *E* de velocidade $\vec{v}$ uma quantidade de movimento associada

$$\vec{G} = m\vec{v} = \frac{E}{c^2}\vec{v}. \tag{42}$$

d) *Aplicação aos fotões de Einstein.*

Se agora na equação (42) fazemos tender *v* para a velocidade *c* da luz, o segundo membro tende para $\frac{E}{c}$; se considerarmos portanto um fotão de energia $E = h\nu$ devemos admitir que êle transporta uma quantidade de movimento

$$G = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}. \tag{43}$$

Mas importa observar que simultâneamente a energia cinética

$$m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

aumenta indefinidamente em relação à energia em repouso $m_0 c^2$, de sorte que se quisermos conservar ao fotão uma energia finita, de grandeza dada

E, devemos considerar nula a sua energia em repouso, na medida em que isto de levar ao repouso um corpúsculo de energia que se desloca com a velocidade da luz tenha um sentido físico.

Um corpúsculo de luz, um fotão, só existe enquanto se desloca com a velocidade *c*; deixa de existir se a sua velocidade devém inferior a *c*.

É o que parece dar-se quando um fotão é absorvido por um átomo material. O quantum de luz não se cola ao átomo, como poderia acontecer com os corpúsculos de Newton: é *digerido* pelo átomo, deixa de existir na qualidade de partícula, a sua energia e a sua impulsão sendo transferidos ao átomo absorvente [7].

É evidente que se topa aqui com uma dificuldade: a de representar o corpúsculo de luz; e apesar das tentativas de Luiz de Broglie para conservar ao fotão um resíduo de massa, admitindo que o grupo de ondas que êle lhe associa se desloca com uma velocidade ligeiramente inferior a *c*, parece que se é conduzido a pôr $m_0 = 0$. [8]

Na Mecânica newtoniana $m_0 = 0$ não tem significado nenhum; na Mecânica einsteiniana representa as partículas de energia que se movem com a velocidade da luz.

Somos portanto levados a concluir que a concepção do radiamento que o considera como um transporte de gôtas de energia que se deslocam com a velocidade da luz, pondo de parte a dificuldade de as representar, conserva a relação (15) entre a energia e a impulsão.

O resultado experimental que indicámos deixa-se assim incorporar tanto na teoria contínua como na teoria discontínua.

e) *Fundamento relativístico da relação* $E = h\nu$

Antes de mais nada eu desejava insistir um pouco sôbre a relação $E = h\nu$; é que ela apresenta-se-nos de inicio duma maneira um pouco arbitrária e encerra mesmo qualquer coisa de paradoxal, no sentido que mais adiante explicarei.

Com efeito, se aceitarmos o caracter dual do radiamento como um facto experimental, põe-se naturalmente a seguinte questão: Por que razão é que a energia dum corpúsculo de luz deve ser proporcional à frequência *n* e não ao comprimento de onda *l*, ou a uma função mais complicada de *n* ou de *l*?

Em resposta vou mostrar que aquela relação tem um fundamento relativístico.

Consideremos um trem de ondas planas harmónicas de comprimento de onda *l*, frequência *n* propagando-se numa direcção fazendo ângulos *a*, *b*, *g* com os eixos de coordenadas. A sua equação é da forma

$$\psi = \psi_0 \cos 2\pi\left(\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\lambda} - \nu t\right), \qquad (44)$$

onde *y* é a grandeza vibrante e ψ_0 a sua amplitude.

---

[7] No vácuo, ou num meio material (que devemos considerar como vácuo cheio de partículas materiais) um fotão tem sempre a mesma velocidade *c*, e nisto está a principal diferença entre as teorias einsteiniana e newtoniana da luz.
Na teoria de Einstein o fenómeno da refracção recebe portanto uma explicação inteiramente diferente da que lhe dá Newton; implica a absorpção com reemissão dos corpúsculos de luz pelas átomos do meio; isto corresponde à sobreposição das ondas elementares primárias e secundárias da teoria electromagnética.
Mas êstes estudos da interacção da matéria e do radiamento não são do programa dêste ano.

[8] Ver L. de Broglie Ann. de Phys. 1925 e Ondes et Mouvements

Introduzindo um *vector de onda* $\vec{K}$ de componentes

$$K_x = \frac{\cos\alpha}{\lambda}, \qquad K_y = \frac{\cos\beta}{\lambda}, \qquad K_z = \frac{\cos\gamma}{\lambda},$$

(44) devém

$$\psi = \psi_0 \cos 2\pi\left(xK_x + yK_y + zK_z - \nu t\right).$$

$K = \frac{1}{\lambda}$ representa o número de ondas por unidade de comprimento num dado instante.

Ora a fase da vibração

$$\Phi = 2\pi\left(xK_x + yK_y + zK_z - \nu t\right).$$

é um invariante da transformação de Lorentz, é um escalar puro quadridimensional, o que de resto facilmente se reconhece, dada a sua natureza física. E como as quantidades

$$x, y, z, ct \tag{45}$$

são componentes dum quadrivector, segue-se que as quantidades

$$K_x, K_y, K_z, \frac{\nu}{c} \tag{46}$$

devem tambem ser componentes dum quadrivector, porque só neste caso é que

$$xK_x + yK_y + zK_z - \nu t$$

se transforma da mesma maneira que

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

quando se passa dum sistema para outro em movimento relativo uniforme.

A fase do trem de ondas é pois caracterizada pelo quadrivector (46).

Como por outro lado

$$G_x, G_y, G_z, \frac{E}{c}$$

são as componentes dum quadrivector (impulsão de universo) que se transforma da mesma maneira que (45), se entre as grandezas corpusculares e as grandezas ondulatórias existir uma relação geral, esta só pode ser

$$\frac{G_x}{k_x} = \frac{G_y}{k_y} = \frac{G_z}{k_z} = \frac{E}{\nu} = h;$$

do contrário essa relação dependeria da escolha do sistema de coordenadas, o que é evidentemente impossível.

Na verdade essa relação, em princípio, deve ser uma função arbitrária dos invariantes

$$K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 - \frac{\nu^2}{c^2} \qquad e \qquad G_x^2 + G_y^2 + G_z^2 - \frac{E^2}{c^2},$$

mas em virtude das fórmulas de definição

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad e \quad G = \frac{E}{c}$$

êstes invariantes são ambos nulos, de sorte que *h* deve ser uma constante universal.

Einstein podia pois ter previsto teoricamente a relação do *quantum*.

A relação $E = h\nu$ encerra ainda uma dificuldade.

Segundo as concepções clássicas, a energia dum corpúsculo é uma grandeza que tem um valor bem determinado. Pelo contrário, na teoria do radiamento não podemos ter, como é evidente, uma linha espectral estrictamente monocromática; poderemos ter uma banda de frequências que ocupe um pequeno intervalo espectral, muito pequeno mesmo, como mostrarei mais adiante, mas nunca rigorosamente nulo.

Na relação do *quantum* há pois qualquer coisa de paradoxal, visto que iguala uma quantidade bem definida a uma outra que o não é.

O verdadeiro sentido desta dificuldade foi dado pela Mecânica ondulatória por intermédio do princípio de Heisenberg de que nos ocuparemos para o ano.

Pressão do radiamento isótropo

Consideremos um recinto contendo radiamento de densidade *u*. Êste radiamento exerce em virtude da sua distribuïção isótropa e da relação (15) sôbre um elemento de parêde suposta parcialmente reflectora e absorvente duma maneira qualquer, uma pressão de radiação

$$p = \frac{u}{3}. \tag{47}$$

a) *Ponto de vista da teoria de Maxwell* (raciocínio elementar).

Para o demonstrarmos vamos considerar uma parêde totalmente reflectora. Se o radiamento é isótropo nenhuma direcção é priveligiada; a pressão deve portanto ter o mesmo valor em todos os pontos e ser normal à parêde. Ora a componente normal da pressão de Maxwell sôbre um elemento de superfície perpendicular ao eixo dos *x* é

$$p_{xx} = -\frac{1}{2}\left(E_x^2 - E_y^2 - E_z^2\right) - \frac{1}{2}\left(H_x^2 - H_y^2 - H_z^2\right)$$

e

$$p_{xy} = p_{zx} = 0.$$

A pressão sôbre a parêde deve ser o valor médio de p_{xx}. Em virtude da isotropia do radiamento, os valores médios dos quadrados das componentes do campo eléctrico são iguais:

$$\overline{E_x^2} = \overline{E_y^2} = \overline{E_z^2} = \frac{1}{3}\overline{E^2}$$

e semelhantemente para as componentes do campo magnético.

Como a densidade de energia é

$$u = \frac{1}{2}\left(\overline{E^2} + \overline{H^2}\right),$$

temos $$\overline{p}_{xx} = \frac{1}{6}\left(\overline{E^2} + \overline{H^2}\right) = \frac{1}{3}u.$$

b) *Ponto de vista da teoria dos fotões (de Broglie)*[9]

Sabem que depois dos trabalhos de Bose, Einstein e de Broglie é legitimo considerar o radiamento como um gás de átomos de luz.

Êstes átomos possuem uma velocidade *c*, a mesma para todos êles e igual à velocidade da luz; cada átomo transporta uma energia *E* e uma quantidade de movimento

$$G = \frac{E}{c}.$$

Admitamos que a repartição das velocidades seja isótropa; seja *u* a energia total (aqui a energia cinética total) dos átomos contidos na unidade de volume; seja *dS* um elemento de área da parêde, *dV* um elemento de volume, *r* a sua distância e q o ângulo de *r* com a normal a *dS*.

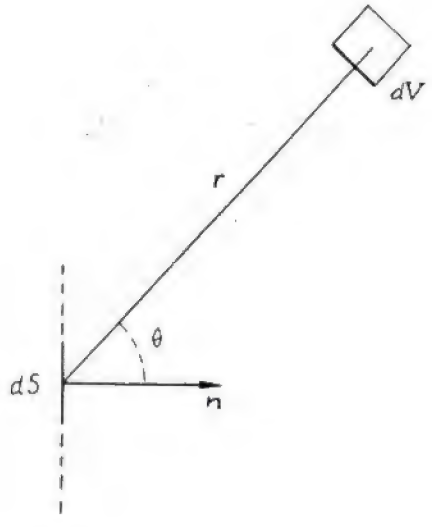


Fig. 3

O ângulo sólido sob o qual se vê de *dV* o elemento *dS* é

$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2}.$$

Consideremos apenas os átomos do elemento *dV* cuja energia está compreendida entre *E* e $E + dE$; o seu número total sendo

$$N_E\, dE\, dV,$$

o número dos que possuem uma velocidade dirigida para *dS* será em virtude da isotropia

$$\frac{d\Omega}{4\pi} N_E\, dE\, dV = N_E\, dE\, \frac{dS\cos\theta}{4\pi r^2} dV.$$

[9] de Broglie, Ann. de Phys., 1925

E, adoptando um sistema de coordenadas esféricas, em que a normal a dS seja o eixo polar, teremos

$$dV = r^2 \, sen\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr.$$

Posto isto, quando um fotão de energia E se reflecte sôbre dS sob um ângulo q ,comunica ao elemento uma impulsão

$$2G \cos\theta = 2\frac{E}{c}\cos\theta,$$

e os fotões do volume dV que possuem esta energia comunicar-lhe-ão uma impulsão

$$2\frac{E}{c}\cos\theta \, N_E \, dE \, r^2 \, sen\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr \frac{dS\cos\theta}{r^2}.$$

Integremos relativamente a E de 0 a ∞, notando que

$$u = \int_0^\infty N_E \, E \, dE,$$

relativamente a r e q respectivamente de 0 a 2p e de 0 a $\frac{\pi}{2}$, finalmente em relação a r de 0 a c. Obtemos assim a impulsão total que sofre num segundo o elemento dS, e, dividindo por dS, a pressão da radiação

$$p = u\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, sen\theta \, d\theta = \frac{u}{3}.$$

O raciocínio que habitualmente se faz nos tratados de Física pode ser conduzido duma maneira independente das hipóteses feitas sôbre a estructura do radiamento, mas não insistirei.

Demonstração da lei de Boltzmann

Demonstremos agora a lei de Boltzmann.

Consideremos para isso um recinto de volume V contendo radiamento negro em equilíbrio no vácuo à temperatura T. Admitamos que êste sistema possa ser tratado como um sistema termodinâmico definido pelas variáveis V e T, e que possamos portanto falar, por exemplo, da sua entropia. É uma hipótese fundamental que a experiência verifica.

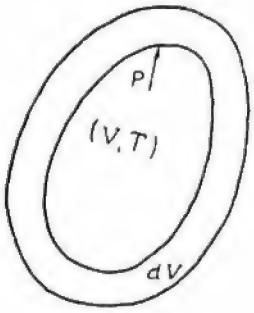


Fig. 4

Concebamos uma modificação reversível durante a qual V e T variem simultaneamente de dV e dT, fornecendo do exterior a energia necessária por um processo qualquer (emissão pela parêde por exemplo).

Como a pressão sôbre a parêde é uniforme e a modificação reversível o sistema fornece um trabalho $pdV = \frac{u}{3}dV$, e sofre por outro lado uma variação de energia interna $d(uV)$. A quantidade de calor *dQ* posta em jôgo será pois

$$dQ = dU + p\,dV = d(uV) + \frac{u}{3}dV,$$

e, como $\frac{1}{T}$ é um factor integrante de *dQ*, obtemos imediatamente

$$u = a\,T^4, \tag{48}$$

que é a *lei de Stefan-Boltzmann.*

O expoente *4* provém directamente do coeficiente $\frac{1}{3}$ da pressão, e *Lord* Rayleigh demonstrou que uma pressão $p = \frac{u}{n}$ conduzia a uma densidade de energia $u = aT^{n+1}$.

No caso dum meio material qualquer é difícil de reproduzir êste raciocínio.

a) *Caso duma dilatação isentrópica* (Langevin)

Vamos agora considerar o caso importante duma dilatação isentrópica. Esta transformação será definida, como na termodinâmica, pelas duas condições seguintes:

1.°) A dilatação deve efectuar-se teòricamente com uma lentidão infinita, a fim de que o estado do sistema difira infinitamente pouco a cada instante dum estado de equilíbrio: *é a condição de reversibilidade restrita;*

2.°) Entre o sistema e o meio exterior não se devem dar trocas de calor: *é a condição de adiabaticidade.* As trocas de energia limitam-se pois ao trabalho dispendido sôbre o parâmetro que se faz variar lentamente.

Suponhamos então que as paredes do recinto sejam perfeitamente elásticas e perfeitamente reflectoras, e consideremos no interior do recinto uma pequena porção dum corpo negro que isolamos por meio dum diafragma também perfeitamente reflector. O papel desta porção de matéria será apenas o de restituir ao radiamento, se fôr necessário, o seu carácter de radiamento negro.

Vamos demonstrar que numa transformação isentrópica o radiamento primitivamente negro conserva êste carácter a uma temperatura diferente, quere dizer que se êle se achava antes da transformação em equilíbrio com a matéria à temperatura *T*, achar-se-á também no fim da transformação em equilíbrio com a matéria à temperatura *T'*.

O raciocínio que vamos fazer funda-se nêste enunciado que Langevin considera equivalente aos enunciados habituais do segundo princípio da termodinâmica:

> *Se um sistema descreve com uma lentidão infinita um ciclo adiabático, e se o trabalho total posto em jôgo é nulo, o ciclo não poderá, em nenhum momento do seu percurso, apresentar um carácter de irreversibilidade.*

Êste enunciado corresponde afinal à definição de reversibilidade completa (à Poincaré).

Tendo então isolado por meio dum diafragma reflector a partícula de corpo negro, efectuemos uma primeira parte da transformação adiabática, deixando o recinto dilatar-se com uma lentidão infinita até o volume V'; temos primeiro

$$\frac{u}{3}dV + d(uV) = 0,$$

ou

$$\frac{du}{u} = -\frac{4}{3}\frac{dV}{V},$$

e integrando

$$\frac{u}{u'} = \left(\frac{V'}{V}\right)^{\frac{4}{3}}. \tag{49}$$

Notem que êste resultado é independente do facto do radiamento conservar ou não o seu carácter de radiamento negro; implica ùnicamente a conservação da isotropia, que é garantida pela lentidão da variação de volume.

Em virtude das reflexões múltiplas sôbre as parêdes e da lentidão da variação de volume, a cada valor de V corresponde um valor bem determinado da densidade u de energia, e portanto o trabalho total nesta primeira parte da transformação obtém-se calculando o integral

$$k\int \frac{1}{3}V^{-\frac{4}{3}}\,dV,$$

onde k um factor de proporcionalidade.

Eu digo que nêste estado final o radiamento é ainda o radiamento normal do corpo negro. Com efeito, suponhamos que o não é, e

1.°) Abramos sem dispender trabalho o diafragma que separa a pequena porção de matéria contida no recinto: o radiamento isotérmico estabelecer-se-há imediatamente, por um processo irreversível, sem que a densidade de energia varie;

2.°) Isolemos de novo a porção de matéria fechando o diafragma e reconduzamos o recinto ao seu volume inicial, por uma compressão adiabática executada com uma lentidão infinita. Durante êste percurso inverso, como a densidade de energia em função do volume (49) varia da mesma maneira que no percurso directo, o trabalho pôsto em jôgo é igual e de sinal contrário ao trabalho pôsto em jôgo na primeira parte do ciclo. Se no final desta operação não tivermos o radiamento normal do corpo negro no interior do recinto, não temos mais que abrir de novo o diafragma, para o fechar logo em seguida ou não: o equilíbrio estabelecer-se-há imediatamente, e o sistema terá voltado exactamente ao estado inicial visto que a densidade de energia retomou o seu valor inicial.

E nós temos assim, para um ciclo fechado, que em suma é irreversível, trocas nulas de calor e de trabalho, em contradição com o segundo princípio da termodinâmica.

O radiamento negro conserva portanto o seu caracter numa dilatação isentrópica e podemos escrever

$$\frac{u}{u'} = \left(\frac{V'}{V}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{T}{T'}\right)^{4} \tag{50}$$

em virtude de (48)

Mas como o que se passa depende ùnicamente da variação de volume do recinto e não da sua mudança de forma, para estudarmos a modificação que sofre a distribuïção espectral do radiamento, basta supor que a dilatação se faz *homotèticamente*. Neste caso as relações (50) tomam uma forma simples.

Seja l uma dimensão do recinto no estado inicial (1) e seja l' o seu homotético no estado final (2); temos

$$\frac{V'}{V}=\left(\frac{l'}{l}\right)^3,\ donde\left(\frac{V'}{V}\right)^{\frac{4}{3}}=\left(\frac{l'}{l}\right)^4=\frac{u}{u'}. \tag{51}$$

Isto é: quando a dilatação é homotética, a densidade de energia varia na razão inversa da quarta potência das dimensões do recinto. Da mesma maneira teremos

$$\frac{T}{T'}=\frac{l'}{l}. \tag{52}$$

b) *Lei de Wien*

Vamos utilizar esta relação (52) para demonstrar a lei de Wien.

Concebamos um recinto contendo radiamento negro inicialmente à temperatura T, e decomponhamos a densidade de energia u pelas diferentes frequências:

$$u=\int_0^\infty u_\nu d\nu=aT^4.$$

Para sabermos como varia u_ν quando se passa da temperatura T à temperatura T' não temos mais que indagar o que devém o radiamento negro a T' graus após uma dilatação adiabática homotética executada com uma lentidão infinita.

Vejamos então o que devém no decorrer duma tal transformação o radiamento de frequências compreendidas entre n e $\nu+d\nu$, quer sob o ponto de vista da sua energia, quer sob o ponto de vista da sua composição espectral.

Como a operação é conduzida duma maneira reversível, a isotropia de tôdas as radiações pode estabelecer-se a cada instante, em virtude das reflexões múltiplas das *ondas*, ou dos *quanta*, e então teremos, aplicando o raciocínio geral a êste caso particular:

$$\frac{du}{du'}=\frac{u_\nu d\nu}{u'_\nu d\nu'}=\left(\frac{l'}{l}\right)^4. \tag{53}$$

Mas o radiamento de frequência n, monocromático a menos dn, vai reflectir-se sôbre espelhos móveis, e a cada reflexão vai sofrer, por efeito de Doppler, uma modificação de frequência.

A questão está agora em saber se o radiamento se conserva monocromático ou se vão aparecer largas bandas de frequência.

Vamos ver que, em virtude da extrema lentidão da variação do parâmetro, as frequências de todos os trens de ondas, ou de todos os quanta, se modificam na mesma relação — inversa da relação de homotetia — e que uma banda monocromática de largura dn se conserva monocromática com uma largura dn' modificada na mesma relação inversa da relação de homotetia.

Fenómeno de Doppler

O fenómeno de Doppler é o segundo fenómeno neutro que temos de considerar.

Consideremos um espêlho movendo-se na direcção normal ao seu plano e fugindo com uma velocidade uniforme $v=\beta c$ duma onda de frequência ν que sôbre êle incide sob um ângulo θ.

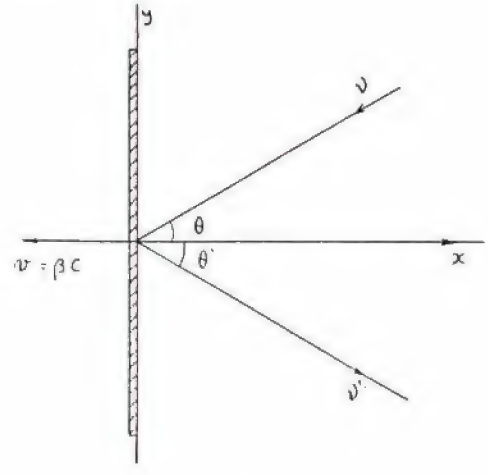


Fig. 5

Claro que a reflexão não se dará segundo as leis de Descartes; a frequência do radiamento modifica-se: se era *n* devém *n'* Do ponto de vista corpuscular o efeito manifesta-se por uma modificação de energia *E* do fotão.

Para calcularmos *n'* vamo-nos servir das fórmulas de transformação relativísticas; do ponto de vista da teoria electromagnética porque as equações de ondas são invariantes numa transformação de Lorentz; do ponto de vista da teoria corpuscular porque os fotões se deslocam com a velocidade *c* da luz.

Consideremos um primeiro sistema de referência ligado ao espêlho, caracterizado por um índice zero, e um segundo sistema em movimento em relação ao primeiro com a velocidade $v=\beta c$. Temos

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{x+\mathrm{v}t}{\sqrt{1-\beta^2}}, & x &= \frac{x_0-\mathrm{v}t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ y_0 &= y, \quad z_0 = z, & y &= y_0, \quad z = z_0, \\ t_0 &= \frac{t+\frac{\mathrm{v}x}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \mathrm{v}=\beta c & t &= \frac{t_0-\frac{\mathrm{v}x_0}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \tag{54}$$

a) *Ponto de vista da teoria electromagnética*

Seja θ_0 o ângulo de incidência e ν_0 a frequência do radiamento incidente para um observador ligado ao êspelho.

Uma onda plana incidente referida aos eixos (O, x_0, y_0) situados no plano de incidência terá uma fase representada por

$$2\pi\nu_0\left(t_0+\frac{x_0\cos\theta_0+y_0 sen\theta_0}{c}\right),$$

e, como nêste sistema de referência a lei de Descartes se verifica, a onda reflectida terá uma fase representada por

$$2\pi\nu_0\left(t_0+\frac{y_0 sen\,\theta_0-x_0\cos\theta_0}{c}\right).$$

Para um observador em movimento com a velocidade $v=\beta c$ obtemos, para a onda incidente, em virtude de (54)

$$\frac{2\pi v_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t+\frac{\beta x}{c}+\frac{(x+vt)\cos\theta_0+y\,sen\,\theta_0\sqrt{1-\beta^2}}{c}\right)$$

e para a onda reflectida

$$\frac{2\pi v_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t+\frac{\beta x}{c}+\frac{y\ sen\theta_0\sqrt{1-\beta^2}-(x+vt)\cos\theta_0}{c}\right).$$

Como a fase da onda é um invariante da transformação de Lorentz, estas equações, para o observador em relação ao qual o espelho se acha em movimento, que mede os ângulos *q* e *q'* e as frequências *n* e *n'*, deverão ser da forma

$$2\pi v\left(t+\frac{x\cos\theta+y\,sen\,\theta}{c}\right)$$

e

$$2\pi v'\left(t+\frac{y\,sen\,\theta'-x\cos\theta'}{c}\right),$$

de sorte que identificando obtemos

$$v=\frac{v_0}{\sqrt{1-\beta^2}}(1+\beta\cos\theta_0) \tag{55}$$

$$\cos\theta=\frac{\beta+\cos\theta_0}{1+\beta\cos\theta_0} \qquad sen\,\theta=\frac{sen\,\theta_0\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\theta_0}$$

$$\cos\theta'=\frac{\cos\theta_0-\beta}{1-\beta\cos\theta_0} \qquad sen\,\theta'=\frac{sen\,\theta_0\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta_0}$$

$$v'=\frac{v_0}{\sqrt{1-\beta^2}}(1-\beta\cos\theta_0). \tag{56}$$

Temos portanto decomposição do efeito de Doppler em dois tempos:

1.° — passagem da frequência v à frequência $v_0(v_0<v)$;

2.° — passagem de v_0 a $v'(v'<v_0)$

A velocidade $v=\beta c$, nêste raciocínio, pode ser tão grande quanto quisermos, mas como as nossas transformações se devem efectuar com a *lentidão necessária à reversibilidade*, b será muito pequeno; limitando-nos então ao termo de primeira ordem em b no desenvolvimento das fórmulas obtemos:

$$\begin{cases} v=v_0\left(1+\frac{v}{c}\cos\theta\right) \\ v'=v_0\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right), \qquad porque\ \theta\approx\theta_0 \end{cases} \tag{57}$$

E se considerarmos apenas a variação de frequência em relação à frequência própria, v_0, teremos

$$\Delta v=-v_0\frac{v}{c}\cos\theta \text{ [10]} \tag{58}$$

---

[10] A mais pequena banda espectral à qual podemos hoje atribuir uma significacão física corresponde a uma diferença de comprimento de onda da ordem de uma unidade X, seja, para simplificar, $d\lambda=2\times10^{-11}$ cm.

b) *Ponto de vista da teoria dos quanta de luz*

Nesta teoria o radiamento é constituído por corpúsculos de energia $E = h\nu$ e de momento $G = \frac{h\nu}{c}$. Cada corpúsculo terá uma impulsão de universo cujas componentes de espaço são G_x, G_y, G_z, e cuja componente de tempo será $\frac{E}{c}$; e da Mecânica relativística resulta que o quadrivector G_x, G_y, G_z, $\frac{E}{c}$ se transforma da mesma maneira que o quadrivector *x, y, z, ct.* Aplicando então a fórmula do grupo de Lorentz

$$ct = \frac{ct_0 - \beta x_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

obtemos para a componente de tempo da impulsão de universo, a única que nos interessa aqui

$$\frac{E}{c} = \frac{\frac{E_0}{c} - \beta G_{0x}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_0}{c}\frac{(1-\beta\cos\theta_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Pondo agora

$$E = h\nu \quad e \quad E_0 = h\nu_0,$$

vem

$$\nu = \frac{\nu_0(1-\beta\cos\theta_0)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

que é a relação (56) entre *n* e ν_0.

Há pois identidade completa de interpretação entre os dois pontos de vista. Êste problema é tratado em detalhe por Von Laue e de Broglie.

Demonstração da lei de Wien (Langevin)

Concebamos agora um recinto capaz de se dilatar homoteticamente e consideremos duas reflexões sucessivas nos pontos A e B.

A cada reflexão correspondem duas modificações iguais da frequência (cada uma igual a $-\beta\nu\cos\theta$) uma à chegada e outra à partida do raio

---

Para o comprimento de onda visível $\lambda = 6\times10^{-5}\,\text{cm}$, temos então

$$\left|\frac{d\nu}{\nu}\right| = \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{2\times10^{-11}}{6\times10^{-5}} = \frac{1}{3}\times10^{-6}$$

e introduzindo êste valor na fórmula de efeito de Doppler, obtemos

$$v\cos\theta = c\left|\frac{d\nu}{\nu}\right| \; 10^4\,\text{cm seg}^{-1}$$

Quere dizer, para uma incidência normal temos uma velocidade de dilatação reversível de uma centena de metros por segundo!...
Curioso *fluido* êste radiamento!...

reflectido. Convém agrupar estas modificações não por reflexões, mas por raios parciais *AB* fazendo corresponder a modificação à partida em *A* com a modificação à chegada em *B*.

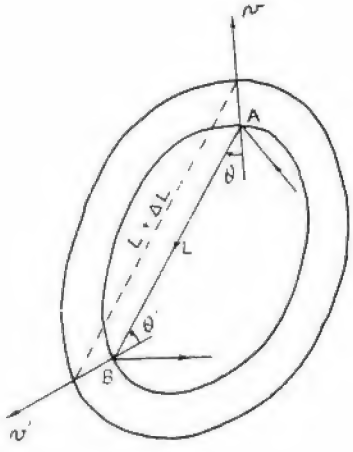


Fig. 6

Para uma grande série de reflexões o resultado total será evidentemente o mesmo, qualquer que seja o modo de agrupamento.

Em *A* e em *B* a dilatação homotética do recinto realizará um deslocamento de velocidades normais *v* e *v'*; durante o tempo $\Delta t = \frac{l}{c}$ de percurso do raio *AB*, teremos uma modificação de frequência

$$-v\frac{v}{c}\cos\theta - v\frac{v'}{c}\cos\theta',$$

ou seja

$$\Delta v = -\frac{v}{c}(v\cos\theta + v'\cos\theta').$$

Ora, durante a deformação, *l* devém $l + \Delta l$, e, como numa dilatação homotética as direcções se conservam paralelas, teremos

$$\Delta l = (v\cos\theta + v'\cos\theta')\Delta t = (v\cos\theta + v'\cos\theta')\frac{l}{c}.$$

Das duas relações anteriores deduzimos

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta l}{l}$$

e integrando

$$\frac{v}{v'} = \frac{l'}{l}. \qquad (59)$$

Cada frequência é pois modificada na relação inversa das dimensões lineares. O radiamento de frequência compreendida entre n e $v + dv$ achar-se-há finalmente compreendido entre as frequências n' e $v' + dv'$ tais que

$$\frac{dv}{dv'} = \frac{l'}{l}. \qquad (60)$$

A energia *du* contida na banda dn e que é $du = u_\nu d\nu$ devém $du' = u'_{\nu'} d\nu'$ após a dilatação.

Mas vimos (53) que

$$\frac{du}{du'} = \frac{u_\nu d\nu}{u'_{\nu} d\nu'} = \left(\frac{l'}{l}\right)^4$$

portanto, em virtude de (60) temos

$$\frac{u_\nu}{u'_{\nu}} = \left(\frac{l'}{l}\right)^4 = \frac{\nu^3}{\nu'^3}, \quad \text{ou} \quad \frac{u_\nu}{\nu^3} = \frac{u'_{\nu'}}{\nu'^3}. \tag{61}$$

Êste resultado é válido qualquer que seja a distribuïção do radiamento, em particular se se trata do radiamento negro, a temperatura final *T'* achar-se-há ligada à dilatação *1'* pela relação

$$\frac{T}{T'} = \frac{l'}{l} = \frac{\nu}{\nu'}, \quad \text{ou} \quad \frac{\nu}{T} = \frac{\nu'}{T'}. \tag{62}$$

Se se parte dum estado inicial (*n, T*) para terminar num estado final (*v', T'*) tais que

$$\frac{\nu}{T} = \frac{\nu'}{T'}.$$

ter-se há também

$$\frac{u_\nu}{\nu^3} = \frac{u'_{\nu'}}{\nu'^3}.$$

Isto significa que quando se faz variar simultâneamente a temperatura e a frequência, considerando a densidade u_ν, como função destas duas variáveis independentes, se $\frac{\nu}{T}$ se mantém constante $\frac{u_\nu}{\nu^3}$ conserva-se igualmente constante, quere dizer $\frac{u_\nu}{\nu^3}$ é função unicamente de $\frac{\nu}{T}$. Se à temperatura *T* traçarmos a curva que representa $\frac{u_\nu}{\nu^3}$ em função de $\frac{\nu}{T}$, e se em seguida passarmos à temperatura *T'*, à mesma abcissa $\frac{\nu'}{T'} = \frac{\nu}{T}$ deve corresponder a mesma ordenada $\frac{u'_{\nu'}}{\nu'^3}$.

A curva que representa $\frac{u'_{\nu'}}{\nu'^3}$ em função de $\frac{\nu'}{T'}$ é portanto a mesma que representa $\frac{u_\nu}{\nu^3}$ em função de $\frac{\nu}{T}$; esta função é bem independente da temperatura, e temos

$$\frac{u_\nu}{\nu^3} = f\left(\frac{\nu}{T}\right), \tag{63}$$

que é a *lei de Wien.*

Esta demonstração da lei de Wien aplica-se unicamente ao radiamento electromagnético; mas a lei de Wien tem um alcance muito mais geral e acha-se ligada a uma propriedade muito importante válida para sistemas mecânicos quaisquer, com a condição de haver pelo menos um período.

A lei de Wien pode pôr-se sob a sua forma usual, que dá a distribuição de energia pelos diferentes comprimentos de onda, fazendo $\nu = \frac{c}{\lambda}$; obtem-se

$$u_\nu d\nu = u_\lambda d\lambda = \varphi(\lambda T) d\lambda = \frac{1}{\lambda^5} \psi(\lambda T) d\lambda .$$

A significância desta fórmula explica-se mais fàcilmente usando da representação gráfica experimental de Lummer e Pringsheim.

Se fôr dada a curva que representa *j* em função de *l* para uma certa temperatura *T*, por exemplo 373°, a lei de Wien permite obtê-la para uma outra temperatura *T'* qualquer. Com efeito: escolhamos à temperatura *T* um certo *l* e à temperatura *T'* um *l'* tais que $\lambda T = \lambda' T'$; então *y* será o mesmo, mas para obtermos a ordenada de *j* temos de dividir *y* por λ'^5, isto é, aumentar a antiga ordenada na relação $(\lambda/\lambda')^5$.

Para a temperatura *T'* obtemos portanto uma curva cujas abcissas são T/T' vezes as antigas abcissas e cujas ordenadas são $(T/T')^5$ as antigas ordenadas.

A área limitada pela curva varia proporcionalmente a T^4, o que é natural, visto que a lei de Wien satisfaz à lei de Stefan-Boltzmann. Esta área representa, de resto, a densidade total da energia.

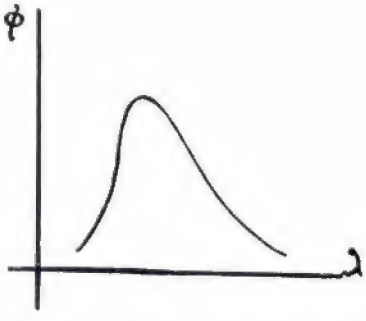


Fig. 7

É de esperar que *y* seja uma função crescente, visto que para um dado *l* a densidade da energia aumenta certamente com a temperatura.

Se indagarmos porém da variação da densidade da energia com o comprimento de onda *l*, o caso complica-se um pouco; porque se *y* aumenta o factor $(1/\lambda)^5$ diminui quando *l* aumenta, e prevê-se a possibilidade de haver um máximo.

De facto a experiência mostra que a densidade do radiamento passa por um máximo para um certo comprimento de onda λ_m , e da lei de Wien segue-se então que

$$\frac{\lambda_m}{\lambda'_m} = \frac{T}{T'}$$

isto é, os comprimentos de onda do máximo são inversamente proporcionais às temperaturas.

Quando *T* aumenta a energia desloca-se para os pequenos comprimentos de onda: É a *lei do deslocamento* de Wien.

A experiência conduziu ao seguinte resultado (Lummer e Pringsheim)

$$\lambda_m T = 0,294 \; cm.grau^{-1}$$

A termodinâmica de par mesmo com a Teoria da Relatividade não permite ir mais longe e determinar a função *f* da lei de Wien. Para isto é necessário recorrer aos métodos da Mecânica Estatística.

II PARTE

[ ]

UM VULCÃO PERTO DE LISBOA ENTRE MORGANHAL E LAVEIRAS

PROF. ERNEST FLEURY
com a colaboração de
ENG.º CASTRO CABRITA
Eng.º do I.S.T

Publicado na Técnica n.º 1 de Dezembro de 1925

Certos teoricos teem a mania de predizer cataclismos, para nos entreterem enquanto se espera a congelação final que deve transformar a nossa velha Terra numa nova Lua ou que, por uma séca pior que a dos Estados Unidos, ela fique privada de todo o liquido ou, ainda, que ela se transforme numa nova estrela inteiramente refundida e fragmentada, por formidaveis erupções. Anunciam-nos, eles, com uma imaginação digna de melhor causa e simplesmente como passatempo, novos diluvios, a desaparição de certos continentes, terriveis tremores de terra, etc, esquecendo-se, é verdade, que uma guerra, como a que acabou, pode dar plena satisfação aos mais péssimistas.

A nossa descoberta, aliás muito modesta, de um vulcão perto de Lisboa não tem esta pretensão. O vulcão de Morganhal-Laveiras, nada tem de alarmante, porque ele é muito velho e se se não reformou já definitivamente, póde pelo menos esperar-se que se tenha habituado ao descanso.

Póde dizer-se, sem alusão de espécie alguma, que Lisboa vive sobre vulcões, mas deve acrescentar-se que outros ha para além da região urbana e que todos felizmente estão fóra do serviço activo ha muito tempo.

A existência destes antigos vulcões é bem demonstrada por grandes lençoes de basaltos lávicos e por produtos de explosões da mesma origem transformados em tufos muito diferenciados: muitos filões teem a mesma significação.

Um passeio ao Parque Eduardo VII permitiria, sem grande esforço e muito facilmente, vêr estas formações basalticas com as lavas negras e duras e os seus tufos moles como que pôdres, intercalados entre margas vermelhas ou calcários brancos que as suportam *(substratum)* e depósitos de calhaus rolados, areias, calcários, margas e argila que as cobrem por vezes *(superstratum)*

Se os documentos geológicos, e estas três séries de formações do Parque Eduardo VII são documentos excelentes, parecem tanto mais obscuras quanto menos se compreendem — o nosso amigo Banana teria tido o mérito de fazer a mesma afirmação se tivesse sido candidato a geologo no Instituto — apresentam, pelo contrário, quando se compreendem a dupla vantagem de serem particularmente instrutivos e de imporem, até fortemente, um limite às divagações duma imaginação muito fertil. Assim:

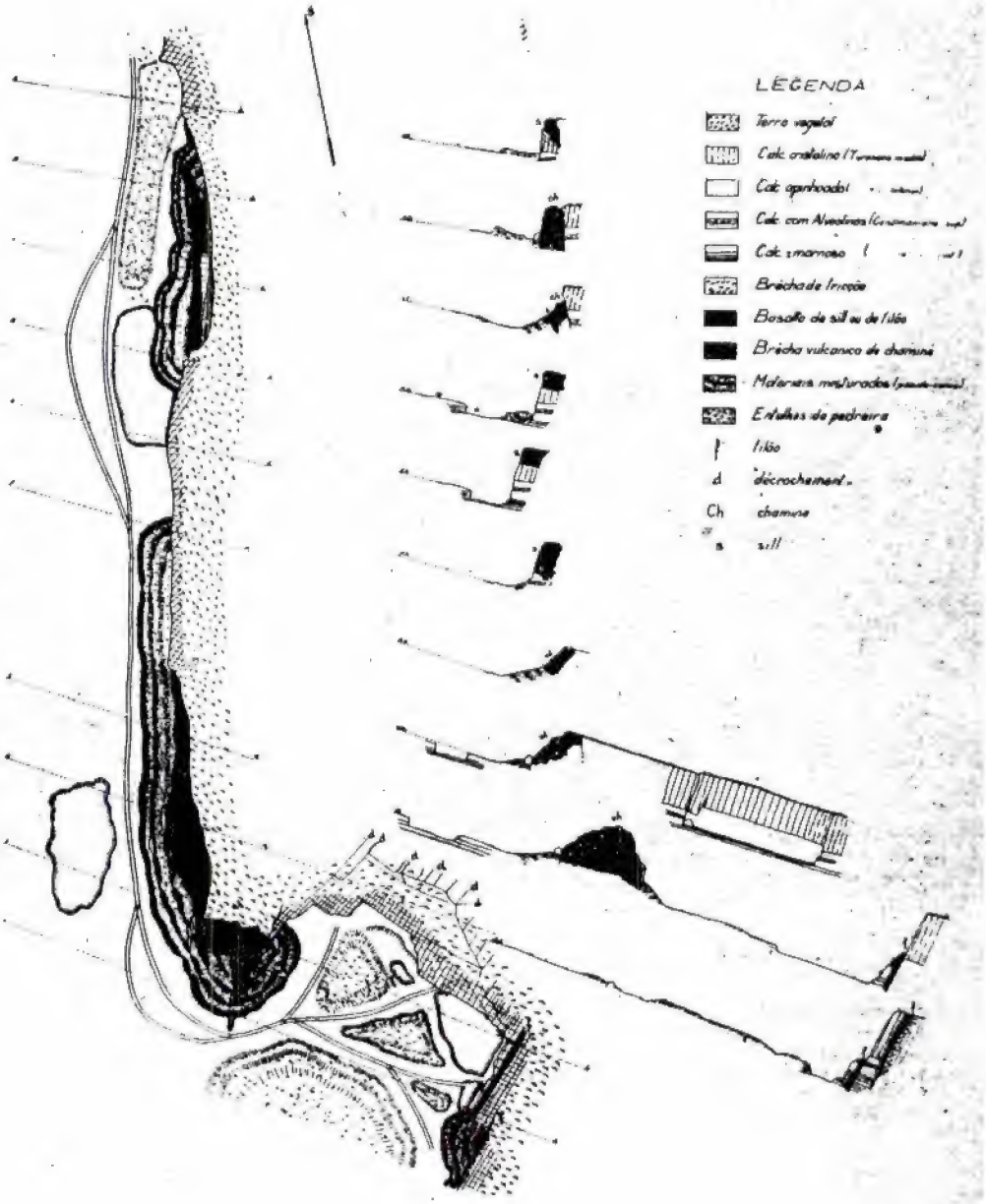
a) A sobreposição destas três séries implica ao mesmo tempo a sua formação sucessiva e a divisão dos tempos geológicos, permitindo fixar a idade relativa de cada uma delas. Nós somos obrigados a empregar denominações convencionais mas os factos são riais.

b) Pelos fosseis das margas vermelhas e dos calcários brancos, Ostras *(Ostrea olisiponensis,* etc.) ou Rudistas *(Sauvagesia Sharpei,* etc.) e pelos dos calhaus rolados, das areias, dos calcários, das margas e das argilas, ainda Ostras *(O. granensis),* e outros Bivalves *(Venus Ribeiroi,* etc.), um bonito Crustaceo *(Achelous Delgadoi),* Foraminiferos *(Miliola, Rotalia,* etc.) e Vegetais terrestres indicando a visinhança de ilhotas podemos afirmar que estas duas series são depósitos marinhos litorais e de pequena profundidade. As do substratum pertencem à parte superior do Cretácio médio, ou Turoniano (C^3 da Carta geológica), ao passo que as do superstratum representam a base do Miocénico marinho português, o Burdigaliano (Mm).

c) Pelo contrario, as formações basálticas indicam condições diferentes. Perto de Carnaxide e ainda em outros pontos, pode vêr-se, intercalados entre as toalhas lavicas, sedimentos provenientes das rochas basalticas mas contendo Moluscos de agua doce (*Bulimus, Pupa, Helix*) ou alguns ossos de Rã e de Crocodilo. Os vulcões estabeleceram-se pois sobre terra firme: as suas lavas indicam fases de actividade eruptiva, enquanto que as intercalações sedimentares que as separam correspondem a fases de repouso vulcanico e de erosão continental ou lacustre. Infelizmente, se estes fosseis caracterisam um regime e *faciés,* eles nada indicam sobre a edade das formações. No conjunto, este complexo basaltico está intercalado entre a parte superior do Cretacico medio e a base do Miocenico marinho; deve pois ter-se formado durante os fins dos tempos secundarios e o principio do Terciario, mas é impossivel ser mais preciso. Se é absolutamente certo que as erupções duraram muito tempo, como o prova a grande quantidade de materiais acumulados em sete grandes series, que, contudo, só são parcialmente sobrepostas nas zonas ao norte do Tejo, não pode, porém, dizer-se quando começaram essas erupções e quando acabaram. Entre o fim do Cretácico medio e o principio do Miocenico, houve o Sénoniano, o Eocenico e o Oligocenico, isto é, tempos muito longos; conhecem-se algumas formações marinhas sénonianas, mas somente ao norte do Cabo Mondêgo; alguns raros depositos continentais ou lacustres ainda considerados como do Sénoniano e irregularmente distribuidos, mas em parte mais recentes; as series basalticas e a formação de Bemfica, que é continental. Ao norte de Lisboa, esta formação de Bemfica cobre bastante regularmente os basaltos e esta sobreposição explica que se atribuam os basaltos ao Eocénico e a formação de Bemfica ao Oligocénico; na rialidade, se houve tambem desenvolvimento paralelo em outros. As primeiras manifestações vulcanicas devem ter-se produzido já durante o Sénoniano, mas somente depois do recuo do mar turoniano e do *enrugamento,* da erosão e da *emergencia* dos seus depositos, pois que os basaltos assentam em *discordancia* sobre os diferentes niveis do Turomano superior ou medio. As ultimas erupções, que são as mais interessantes debaixo do ponto de vista humano, não foram, certamente, tão antigas como se supõem; a grande massa basaltica é provavelmente éocemica ou quando muito do principio do oligocenico, mas houve ainda algumas manifestações vulcanicas durante o Miocenico e, mesmo, durante o Pliocenico.

Assim pois, a História geologica da região de Lisboa, para este periodo,

PEDREIRA DO MORGANHAL



é dominada pela instalação dos vulcões basalticos sobre terra firme aparecidos entre a *regressão* do mar turoniano e a *transgressão* de o do Miocemico. Houve certamente estreitas relações entre o enrugamento e a emergencia dos depositos marinhos turonianos e as erupções basalticas; até hoje, somente a observação dos factos não permite reconhecer a significação destas relações. As antigas regiões vulcanicas estão hoje calmas; elas gosam provisoriamente pelo menos, duma tranquilidade aparente, mas mostram as cicatrizes das convulsões e não esqueçamos que "assentam sobre os vulcões".

A Carta geologica de Portugal mostra claramente que as formações basalticas da região de Lisboa apresentam dois tipos absolutamente diferentes:

a) Em volta da cidade, afloram numa auréola irregularmente alargada entre o Turoniano e o Oligocenico de Bemfica ou o Miocenio marinho, mas bruscamente interrompida pelo Tejo.

b) Para o exterior, só existem afloramentos pouco extensos, irregularmente dispersos, mas muito numerosos.

O primeiro tipo deve ser considerado como uma grande mancha bastante bem conservada de antigos aparelhos vulcanicos que apresentam sobretudo nas faces superiores, *correntes* de lavas e alguns tufos. A ausencia de *chaminés* explica-se facilmente: as que existem devem estar cobertas e não são portanto, visiveis.

Não se podem procurar os antigos *cones vulcanicos* porque os basaltos, por serem lavas muito fluidas, espalhavam-se em largas toalhas; alem disso, os pequenos cones que se puderam formar devem ter sido gastos pelas aguas que acumularam os materiais de origem basaltica das intercalações continentais ou lacustres.

O segundo tipo, pelo contrario, não tem mais que as raises destes antigos aparelhos eruptivos decapitados pela erosão; estende-se sobre grandes superficies e, se apresenta filões numerosos e muito diferenciados de aspecto e de composição, só excepcionalmente mostra chaminés bem caracterisaveis. O emprego deste adjectivo *caracterisavel* é indispensavel aqui, porque as chaminés são de facto bastante numerosas, mas só raras vezes se distinguem dos filões que fôram "fendas eruptivas".

A "chaminé do Morganhal Laveiras" é suficientemente tipica para que se possa falar de *vulcão* e, dadas estas explicações gerais pondo o problema na generalidade, a descrição dos aparelhos eruptivos poderá ser feita rapidamente.

UM VULCÃO PERTO DE LISBOA ENTRE MORGANHAL E LAVEIRAS

Conclusão

Publicado na Técnica n.º 2 de Janeiro de 1926

Entre Lisbôa e S. Julião da Barra, o Tejo[1] corre numa "fossa de abatimento" relativamente recente. As grandes linhas de fractura deste

[1] Por razões "sentimentais e patrioticas muito respeitaveis" e tambem por o hábito o ter consagrado, pode-se falar do Tejo á altura de Lisbôa. Contudo, se nos cingir-

abatimento estão cobertas pelas águas, mas a sua influencia reconhece-se facilmente pela estrutura do solo e sobretudo pelo traçado da circulação superficial, que teve de estabelecer-se em novas condições. Na margem direita do Tejo, os cursos de água correm para o Sul sobre uma superfície acidentada mas mergulhando naquela direcção, apesar da sua composição muito diferenciada; na margem esquerda, pelo contrario, por causa duma modificação do nível da sua saída, os vales ficam "suspensos." por exemplo, dos lados de Almada.

A Ribeira de Barcarena é provavelmente o curso de água mais típico da zona setentrional; nasce na pequena mancha terciária do Sabugo, que representa um antigo gôlfo marinho interno do Miocénico; depois entre os dois grupos tectónicos de Sintra e de Dona Maria, cava o seu vale no complexo cretácico, para penetrar finalmente na orla da grande "cuvette" basáltica e terciária de Lisbôa.

As povoações de Morganhal e de Laveiras estão situadas neste vale que é aí muito pitoresco e largamente aberto nas séries do Miocénio marinho, dos Basaltos e do Cretácio médio. É naturalmente um vale de erosão, porque as diferentes formações se encontram muito regularmente sobre as duas margens, mas a alturas um pouco diferentes, porque se inclinam muito fracamente para Sudeste.

O Miocénico marinho, constituido por areias grosseiras, conglomerados e calcáreos marnosos mais ou menos fossilíferos *(Ostrea crassissima* ao Norte do reduto de Caxias), só é representado na parte mais alta das margens pelo Burdigaliano e a sua espessura aumenta para o Sul.

O Oligocénico ou formação de Bemfica falta, como aliás, em toda a região a Oeste do Parque Eduardo VII.

As toalhas basálticas, muito espessas, estão bem a descoberto nas duas margens do vale. Os basaltos lávicos formam alguns "caos" de grandes blocos na margem esquerda, e são explorados ao Norte do reduto de Caxias para os pavimentos das estradas, ao passo que, na margem direita, são cortados em vertentes mais suaves. Em parte alguma se encontra a continuação dos tufos e das intercalações sedimentares com fósseis de água dôce *(Bulimus, etc)* do visinho vale do rio Jamôr.

O Cretácico superior (Senoniano) e a parte superior do Turoniano (margas com *Ostrea olisiponensis)* são desconhecidos.

Pelo contrário, o Turoniano médio com os seus calcáreos cristalinos com grandes *Rudistas é* magnificamente desenvolvido e, em alguns pontos, apresenta na parte superior leitos muito regulares e delgados de calcáreo de grão muito fino contendo uma bela fauna de Peixes, especialmente *Sardinoides*, e intercalações de silex. Por baixo dos calcáreos cristalinos, encontra-se o Turoniano inferior propriamente dito, os calcáreos cenomanianos com *Alveolinas*, e a série do Belasiano progressivamente mais marnoso á medida que se desce.

Neste ultimo, aparecem, muito irregularmente distribuidos, fragmentos de Vegetais lenhosos carbonisados, prova incontestavel de que durante o Belasiano houve um litoral muito próximo ou então ilhotas.

No conjunto, estas três séries são sobrepostas com muita regularidade, apesar de estarem em discordancia, porque as fases basalticas

---

mos simplesmente aos factos, é preciso reconhecer que o Tejo tem um delta inferior entre Santarem e Sacavem e que o Mar da Palha não é mais do que um gôlfo marinho interior, que representa "actualmente" os antigos gôlfos dos mares miocénicos e pliocénicos; com maior justesa podia-se classificar o Mar da Palha como um *Reliktensee*, porque ele não é mais que um testemunho do passado, tendo perdido a sua antiga comunicação com o mar por Albufeira e comunicando agora com ele por Cascais.

correspondem a um periodo de emersão continental que separou a regressão marinha turoniana da transgressão miocénica.

Por outros termos, os vulcões basalticos estabeleceram-se sobre um continente depois do recúo dos mares cretácicos e este continente foi de novo coberto, mais tarde, pelo mar terciário do Miocénio.

As grandes pedreiras de Morganhal-Laveiras estão abertas nos calcáreos cristalinos do Turoniano médio e nos progressivamente mais marnosos do Turoniano inferior, do Cénomaniano (camada com *Alveolinas)* e da parte superior do *Belasiano*. Fornecem, pois, materiais diferentes que são muito apreciados. Actualmente porêm, a exploração é pouco ativa.

Debaixo do ponto de vista geológico, estas pedreiras são particularmente interessantes por causa dos seus aparelhos eruptivos e das suas linhas de fractura.

Os aparelhos eruptivos. — Em virtude do aprofundamento do vale da Ribeira de Barcarena que corta não só a cobertura terciária, mas tambem as toalhas basálticas e o Cretácico médio, os aparelhos eruptivos estão decapitados e não se vê mais do que as suas raízes, mas pode-se facilmente reconstituir as chaminés vulcanicas e liga-las ás toalhas primitivas que estão ainda representadas nas margens.

Como se vê na estampa que acompanha esta descrição, existem três grandes grupos eruptivos.

1.° A Noroeste, dois filões quasi verticais e sensivelmente paralelos;

2.° Cêrca do centro, uma grande chaminé regularmente circular ao Norte, mas parecendo aberta e prolongada para o Sul.

3.° Finalmente, ao Sul, um ultimo grupo muito complexo.

Os dois filões do primeiro grupo estão actualmente isolados. O seu enchimento é constituido por uma rocha basáltica muito alterada, argilo-ferroginosa, dividida em camadas verticais por veios de calcite algumas vezes fibrosa.

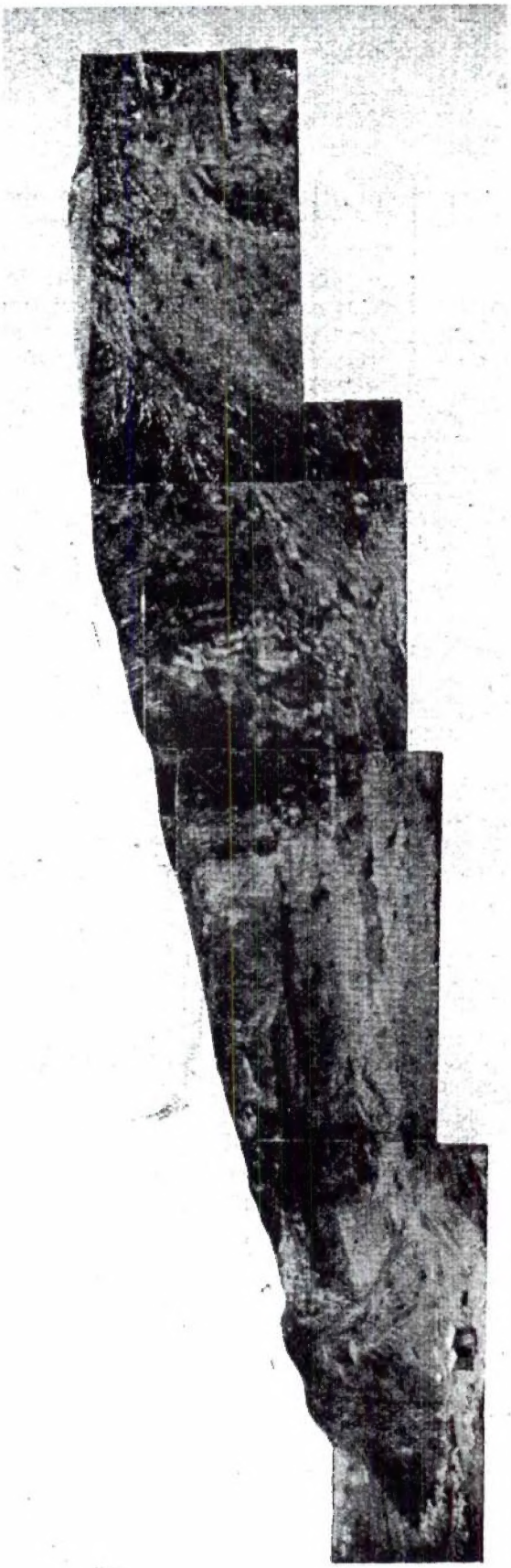
Na parte superior, estes filões ligam-se a um *sill* muito delgado e naturalmente mal conservado, que está intercalado no calcáreo cristalino. O metamorfismo dos calcáreos reconhece-se facilmente, mas foi modificado por um hidrometamorfismo das aguas que-se traduz sobretudo por uma forte coloração vermelha e mesmo por uma concentração de sais de ferro.

Os dois grupos do centro e do Sul, são muito dificeis de separar. Seria, evidentemente muito cómodo admitir duas chaminés distintas, e a presença dos conglomerados basálticos, ao centro e ao Sul, parece á primeira vista justificar esta interpretação. Contudo, se a chaminé do centro está bem delimitada no seu bordo Norte por varios grupos de calcáreos *in situ*, prolonga-se para o Sul e liga-se a um espêsso *sill* muito irregular. O grupo meridional tem ainda o aspecto duma chaminé vulcanica; o seu enchimento é contudo muito especial e os conglomerados basálticos só aparecem a uma certa distancia do bordo sob a forma de um *dyke* que se prolonga como um largo filão ligeiramente inclinado.

Nestas condições, parece razoável admitir que provavelmente, não ha duas chaminés, mas antes uma só, que seria alongada e estreita, como "uma grande fenda".

Esta chaminé estava em ligação, primeiro que tudo com o espêsso *sill* que a cobre ainda parcialmente, e depois, sem duvida, com as toalhas basalticas que hoje só são representadas nas margens.

A distinção feita entre filões ou sills *(filões-camadas)* e chaminés é bastante facil. Os primeiros são constituidos por basaltos que podem estar muito diversamente decompostos e por consequencia muito diferentes de aspecto e de composição; as segundas teem, ao contrario, conglomerados eruptivos formados por blocos de basalto, mais ou menos alterado, e de diversas



Aspecto da pedreira de Morganhal
(Dezembro 1925)

rochas sedimentares (calcáreos, etc.) arrancados das paredes; aí se encontram com efeito, calcáreos cristalinos metamórficos e uma rocha azulada que parece ser um calcáreo marnoso fortemente modificado. Finalmente, nos basaltos alterados como nos conglomerados eruptivos, as fendas são cheias por depositos mais recentes acumulados pelas aguas e formados por argila ferruginosa, por calcite algumas vezes fibrosa, e muito raramente por palégorskite (carvão de montanha).

Assim pois, deve ter havido aqui um verdadeiro vulcão com a sua chaminé muito irregular e um sistema de filões e de sills. A irregularidade da chaminé não deve surpreender, porque as lavas seguem forçosamente o caminho que encontram; podem evidentemente tornar mais regular a sua passagem, por fricção ou arrancando materiais das parêdes, mas são as grandes fendas que, parcial ou totalmente são utilizadas. Não se conhece a cratéra vulcanica, nem o cone, mas sómente a chaminé e o seu enchimento, isto é, um *neck*.

Os sistemas de fracturas — A fractura mais importante é provavelmente a que fixou o vulcão; contudo sobre o terreno ela denuncia-se sómente pelo enchimento eruptivo.

Os dois filões do grupo de Noroeste ocupam igualmente fendas.

É preciso, portanto, admitir pelo menos três grandes fracturas que foram utilisadas pelas rochas eruptivas. Existem contudo muitas outras.

Os calcáreos cristalinos apresentam uma rêde de fracturas paralelas, regulares e muito proximas umas das outras. Os calcáreos marnosos que ficam por baixo só mostram, pelo contrário, fracturas muito mais espaçadas e de direcção variavel.

No conjunto, o complexo é muito fracturado, mas, por um lado, os calcáreos marnosos são mais compactos que os calcáreos cristalinos, e por outro, estas fendas não modificaram quasi nada a posição rela-

tiva das camadas. O nivel das *Alveolinas* do Cenomaniano ou a base dos calcáreos cristalinos são excelentes pontos de referencia.

As unicas perturbações dignas de nota são: a presença duma bela brecha muito espessa ao longo de um dos filões do grupo de Noroeste; um deslocamento muito pronunciado da zona em contacto com esta brecha de fricção; fracas modificações de inclinação ou ligeiros deslocamentos das camadas ao longo da chaminé vulcanica.

A regularidade das camadas contudo, é só aparente: os niveis foram conservados ou pouco modificados porque os movimentos não foram verticais, mas sim horisontais: *não ha "falhas", mas ha "decrochements"*. Os diferentes grupos de calcáreo deslisaram paralelamente e a prova disto está na estriação sensivelmente horisontal das paredes das fracturas. Contudo, em alguns casos estes deslocamentos não foram regulares e, devido a uma certa inclinação, produsiram-se desnivelamentos que parecem indicar falhas.

Finalmente, convem ainda notar bem que estes diferentes grupos cortados pelas grandes fendas dos filões e da chaminé vulcanica moveram-se isoladamente e de maneiras diferentes sendo as suas fracturas sobretudo paralelas aos enchimentos basálticos.

É impossivel fixar a edade destas fendas.

Algumas são anteriores ás erupções basálticas pois que foram cheias pela lava, outras foram produzidas por erupções ou ainda por acções tectonicas posteriores mais recentes. A brecha de fricção que existe nas paredes de um dos filões indica incontestavelmente movimentos post-basálticos, pois que ela não é penetrada pelo basalto do filão.

Estes movimentos horisontais, ou "décrochements" desempenharam um papel extremamente importante em toda a região de Lisbôa. Infelizmente deve acrescentar-se que a sua acção está ainda por terminar e, para nos convencermos disto, basta visitar certas partes de Lisbôa cujas construções apresentam, segundo linhas bem determinadas, provas seguras de certos movimentos lentos do solo. As direcções sensivelmente N-S são frequentes; contudo, ha tambem algumas que são quasi paralelas ao Tejo. Debaixo deste ponto de vista, as "falaises" de Cacilhas á Trafaria são particularmente interessantes.

INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA E INDÚSTRIA

ENG. A. HERCULANO DE CARVALHO
Prof. do I.S.T
Publicado na Técnica n.º 42 de Março de 1932

A afirmação de que a nossa época é caracterizada por um formidável desenvolvimento industrial, predominando sôbre tôdas as outras manifestações da actividade humana, é já um lugar comum; mas é curioso notar como tal feição se continua a acentuar no momento em que uma crise de sôbre-produção avassala o mundo. Nos países progressivos não só se instituem medidas de defesa das indústrias próprias, já existentes, mas outras fábricas mais potentes se instalam e novas indústrias se criam.

É certo que os efeitos da crise contrariam por vezes êstes esforços, que alguns economistas aconselham ainda, como remédio salvador, uma política de acordos e de restrições industriais; mas tal doutrina parece não prevalecer e cada vez se quer produzir mais e melhor. Difícil é o saber de que lado está a razão. No meio dum problema tão vasto e complexo a própria Economia Política se confessa impotente para lhe apontar soluções seguras. Será isto bastante para apregoar o seu descrédito? Não o crêmos: ciência nova, as suas leis estão ainda insuficientemente estudadas; e, porventura, a decantada crise tem as suas origens em outros fenómenos que não simplesmente os económicos.

Mas uma outra característica possue a nossa época: a da investigação científica. Chega a impressionar a soma de trabalhos que diàriamente e em todo o mundo se publicam em revistas e jornais científicos; a actividade dos laboratórios oficiais e particulares, dos centros de estudo e das academias pode classificar-se hoje em dia, de febril.

Sente-se até a necessidade duma organização especial para evitar duplicações por vezes inúteis. O director duma das bibliotecas de Londres calculava há pouco que, por falta duma bibliografia bem organizada, 50% do trabalho científico actual era em pura perda por consistir em duplicação! Notemos que a repetição nesse género de trabalho nem sempre quer dizer inutilidade; se apontamos a afirmação é sobretudo para frisar a intensidade com que hoje se trabalha no campo científico. Sendo êste campo vastíssimo, vêmo-lo sulcado em todos os sentidos, de tal forma que, em média, o mesmo assunto é tratado da mesma forma por dois investigadores, que se ignoram apesar do sem número de publicações da especialidade correndo mundo.

*
* *

Qual a relação existente entre o labor científico e a indústria?

A resposta é fácil: a actual actividade industrial é precisamente o resultado dos avanços da ciência. Dois objectivos tem esta: a satisfação espiritual do desejo de saber e o domínio da matéria. Os dois fins não se excluem, antes o segundo é conseqüencia do primeiro. As mais importantes realizações no campo da indústria, sobretudo a partir do meado do século passado, são na maior parte devidas a descobertas

desinteressadas feitas no domínio da ciência pura.

A telegrafia e a telefonia sem fios constituem exemplos comezinhos do que afirmamos. Lembramo-nos de outros: as aplicações múltiplas e valiosas dos fornos eléctricos, que derivam das experiências já clássicas de Moissan; a síntese do amoníaco, nascida duma discussão entre Haber e Nernst sôbre o valor duma constante de integração; o fabrico actual de milhares de matérias còrantes orgânicas, etc., etc.

Uma vez assim averiguado que o progresso industrial é a resultante dum progresso científico anterior, ocorre responsabilizar êste, com uma parte bem pesada, pela crise que atravessamos. Produz-se demasiado porque há indústrias a mais e porque as fábricas se multiplicam; há desemprêgo porque mecanismos sempre mais perfeitos e económicos substituem o braço do homem. Logo é a ciência a principal culpada.

Devemos por isso destruir as máquinas e abdicar da nossa curiosidade de saber? Tal solução já tem sido proposta por alguns, mas o simples bom senso a faz rejeitar, por monstruosa.

Vimos há pouco êste assunto tratado por um grande espírito francês, o matemático Émile Borel, num pequeno artigo claro e desassombrado publicado na "Scientia" [1]. Como não podia deixar de ser, a conclusão é consoladora para o nosso espírito.

Na realidade o estabelecimento de indústrias novas se, por um lado, ajuda o congestionamento dos mercados, cria, por outro, novas necessidades de compra e dá emprêgo a mais operários; o aperfeiçoamento da técnica vem melhorar e baratear os artigos e, portanto, facilitar a sua venda. Dir-se-á: êsses aperfeiçoamentos traduzem-se quási sempre na substituïção do trabalho muscular pelo trabalho da máquina, motivando assim o desemprêgo. Isto é exacto. Mas há aqui um desiquilíbrio de que a ciência não é culpada. A tendência hoje em dia é para o trabalho intelectual; vêmos freqüentemente o filho do operário ou do trabalhador do campo, tirar um curso superior, apetrechando-se para viver pelo cérebro.

Esta ascensão é lenta e o progresso da máquina mais rápido: daqui o desiquilíbrio.

Como remediá-lo? Aproveitando exactamente uma das conseqüências do uso da máquina, que permite ao operário trabalhar menos horas, e empregar o tempo disponível a instruí-lo para evitar que êle venha a ser um "desadaptado"; facilitar por todos os modos a cultura das massas operárias, não esquecendo que não basta instruir mas ainda educar; finalmente, dar incremento à investigação científica que utilizará muitos dêsses elementos já cultivados, e libertos do dilema terrível: o trabalho muscular ou a fome.

Esta posição do problema não é nova. Até mesmo em literatura e no cinema o assunto tem sido tratado. Bem conhecido é o romance de Claude Farrère — Les Condamnés à Mort — que o apresenta de forma particularmente feliz.

Uma fita relativamente recente, "Metropolis", baseia-se também nele.

Farrère, impiedosamente, suprime os "desadaptados" dum modo original e fantasista: desmaterializando-os — símbolo da acção inexorável da selecção natural. O desenlace do "filme" é mais humano: invoca-se a fraternidade, o coração, ligando o cérebro que comanda ao braço que executa.

Mas a solução real parece-nos que só poderá ser a indicada no artigo que citamos; talvez ainda um pouco lenta, mas segura.

Algumas frases de Borel: "L'essentiel est que soit maintenue jalouse-

---

[1] V. "Scientia", Vol. 25. N.º 237-1, 1932 – pág. 99.